

Differentialgleichungen I



Eigenwertprobleme

Buch Kapitel 6.13

Erinnerung: Selbstadjungierte Differentialoperatoren

Betrachte: (Randwertproblem)

Zu lösen sei auf dem Intervall $I = [a, b]$

$$\begin{aligned} -Ly &= \lambda w(x)y, \\ R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ R_2(y) &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sei L ein Sturm-Liouviller Differentialausdruck, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ ($k = 1, 2$), $w(x)$ eine auf I positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von L wird $C^2([a, b], \mathbb{R})$ angenommen, genauer die Teilmenge $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen. Die Elemente aus M heißen **Testfunktionen**.

Satz: (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem)

Seien $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ der für $x \in [a, b]$ definierte Sturm-Liouvillesche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion $p(x) > 0$, stetig diff'barer Funktion $q(x)$ und stetiger Funktion $w(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ ($k = 1, 2$).

Dann ist das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

$$L[y] + \lambda w(x)y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen $y_\lambda(x)$ zu gegebenen Parametern λ heißen **Eigenfunktionen** (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter λ heißen dann **Eigenwerte** des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems.

Definition: (Selbstadjungierter Differentialoperator)

Sei L ein auf $I = [a, b]$ definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an $x = a$ und $x = b$ erfüllen (Testfunktionen).

Gilt für alle $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt L **selbstadjungierter Differentialoperator** auf M . Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls **selbstadjungiert**.

Betrachte: (Randwertproblem)

Zu lösen sei auf dem Intervall $I = [a, b]$

$$-L[y] = \lambda w(x)y,$$

$$R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0,$$

$$R_2(y) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

Dabei sei L ein Sturm-Liouville'scher Differentialausdruck, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ ($k = 1, 2$), $w(x)$ eine auf I positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von L wird $C^2([a, b], \mathbb{R})$ angenommen, genauer die Teilmenge $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen!. Die Elemente aus M heißen **Testfunktionen**.

Definition: (Selbstadjungierter Differentialoperator)

Sei L ein auf $I = [a, b]$ definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an $x = a$ und $x = b$ erfüllen (Testfunktionen).

Gilt für alle $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt L **selbstadjungierter Differentialoperator** auf M . Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls **selbstadjungiert**.

Satz: (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem)

Seien $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ der für $x \in [a, b]$ definierte Sturm-Liouvillsche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion $p(x) > 0$, stetig diff'barer Funktion $q(x)$ und stetiger Funktion $w(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ ($k = 1, 2$).

Dann ist das **Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem**

$$L[y] + \lambda w(x)y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen $y_\lambda(x)$ zu gegebenen Parametern λ heißen **Eigenfunktionen** (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter λ heißen dann **Eigenwerte** des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems.

Orthogonalität

Definitionen:

- Führe ein **Skalarprodukt** auf dem Vektorraum $C^2([a, b], \mathbb{R})$ ein:

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x)w(x) dx.$$

- Dabei sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare und auf $[a, b]$ **positive Gewichtsfunktion**.
- Zwei Elemente $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ heißen **orthogonal**, falls $(u, v) = 0$.

Erinnerung (Orthogonalität im \mathbb{R}^n)

- Ist $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n ($(e_i, e_j) = \delta_{ij}$), so kann jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dargestellt werden:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

- Für die Koeffizienten gilt $c_j = (x, e_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Satz (Orthogonalität in Sturm-Liouvilchen Eigenwertproblemen)

Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvilchen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda w = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ einem Parameter, gelte:

- Für $x \in [a, b]$ sei $p(x)$ stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$ seien stetig,
- Für $x \in [a, b]$ sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$.

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ gehörende nichttriviale Lösungen $y_1(x), y_2(x) \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ Orthogonalität, d.h.

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x)y_2(x)w(x) dx = 0,$$

falls

- y_1 und y_2 die homogenen Randbedingungen $R_1(y) = 0 = R_2(y)$ erfüllen, d.h. λ_1, λ_2 sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen y_1, y_2 des Sturm-Liouvilchen Eigenwertproblems, oder
- die Koeffizientenfunktion $p(x)$ die Bedingung $p(a) = p(b) = 0$ erfüllt.

1

Definitionen:

- Führe ein **Skalarprodukt** auf dem Vektorraum $C^2([a, b], \mathbb{R})$ ein:

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)w(x) dx.$$

- Dabei sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare und auf $]a, b[$ positive **Gewichtsfunktion**.
- Zwei Elemente $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ heißen **orthogonal**, falls $\langle u, v \rangle = 0$.

Erinnerung: (Orthogonalität im \mathbb{R}^n)

- Ist $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n ($(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}$), so kann jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k.$$

- Für die Koeffizienten gilt $c_j = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Satz: (Orthogonalität in Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblemen)

Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvillschen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w y = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda w y = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ einem Parameter, gelte:

- Für $x \in [a, b]$ sei $p(x)$ stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$ seien stetig.
- Für $x \in]a, b[$ sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$.

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ gehörende nichttriviale Lösungen $y_1(x), y_2(x) \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ Orthogonalität, d.h.

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)w(x) dx = 0,$$

falls

1. y_1 und y_2 die homogenen Randbedingungen $R_1(y) = 0 = R_2(y)$ erfüllen, d.h. λ_1, λ_2 sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen y_1, y_2 des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems, oder
2. die Koeffizientenfunktion $p(x)$ die Bedingung $p(a) = p(b) = 0$ erfüllt.

1

Entwicklung nach Eigenfunktionen

Satz: (Folge der Eigenwerte und Oszillation der Eigenfunktionen)

Sei das Sturm-Liouvilischen Eigenwertproblem mit Randbedingungen gegeben:

$$L[y] + \lambda w y = 0, R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = R_2(y).$$

Dabei sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$. Dann sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems einfach und bilden eine unendliche Folge reeller Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, die gegen ∞ strebt. Jede zu λ_n gehörende Eigenfunktion hat in $]a, b[$ genau n Nullstellen.

Motivation: (Eingegrenzte Membran)

Die Besondere Differentialgleichung

$$-L[y] = -(\rho y')' + \frac{15}{r^3} y = \omega^2 \rho y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

repräsentiert beispielsweise das Schwingungsverhalten einer (ringförmigen) Membran, die am Rand eingepannt ist, wobei a der innere Radius und b der äußere Radius ist und ρ eine Materialdichte ist.

- Nach Satz gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Eigenwerten $\omega_n^2 < \omega_{n+1}^2 < \dots$ mit $\omega_n^2 \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).
- ω_n sind gerade die Eigenfrequenzen der Membran.
- k ist die Anzahl der Wellenmaxima in radialer Richtung.



Satz: (Entwicklungssatz)

Sei $(y_n(x))$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten λ_n des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega w y, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion $p(x) > 0$ und der Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ auf $[a, b]$ gehören. Es gilt also

$$(y_k, y_j) = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion f , die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, y_n) y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in $[a, b]$ gleichmäßig und absolut.

2

Satz: (Folge der Eigenwerte und Oszillation der Eigenfunktionen)

Sei das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem mit Randbedingungen gegeben:

$$L[y] + \lambda w y = 0, R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = R_2(y).$$

Dabei sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$. Dann sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems einfach und bilden eine unendliche Folge reeller Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, die gegen ∞ strebt. Jede zu λ_n gehörende Eigenfunktion hat in $]a, b[$ genau n Nullstellen.

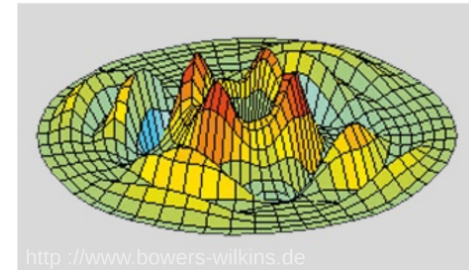
Motivation: (Eingespannte Membran)

Die Besselsche Differentialgleichung

$$-L[y] = -(\rho y')' + \frac{n^2}{\rho} y = \omega^2 \rho y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

repräsentiert beispielsweise das Schwingungsverhalten einer (ringförmigen) Membran, die am Rand eingespannt ist, wobei a der innere Radius und b der äußere Radius ist und ρ eine Materialeigenschaft ist.

- Nach Satz gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Eigenwerten $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \dots$ mit $\omega_k^2 \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).
- ω_k sind gerade die Eigenfrequenzen der Membran.
- k ist die Anzahl der Wellenmaxima in radialer Richtung.



Idee: (Entwicklung durch Eigenfunktionen)

- Diese Schwingungszustände möchte man mit Hilfe der (dominierenden) Frequenzen (Eigenfunktionen) darstellen.
- Wegen der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen lassen sich (Lösungs-) Funktionen mit geeigneten Randbedingungen als Eigenfunktions-Reihen darstellen!

Satz: (Entwicklungssatz)

Sei $(y_n(x))$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten λ_n des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega w y, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion $p(x) > 0$ und der Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ auf $[a, b]$ gehören. Es gilt also

$$\langle y_k, y_j \rangle = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion f , die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in $[a, b]$ gleichmäßig und absolut.



Nichtlineare DGLn

Motivation (Pendel)

- Die Gleichung zur Beschreibung einer Pendelschwingung lautet

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

- Beobachtung: diese Gleichung ist **nichtlinear!**
- Für kleine Auslenkungen φ gilt $\sin \varphi \approx \varphi$.
- Näherungsweise erhält man also die lineare DGL

$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

Definition (Dynamisches System)

Betrachte die Abbildungen

$$F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

x differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = F(x, t),$$

mit $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ und $F(x, t) = (F_1(x, t), \dots, F_n(x, t))^T$, heißt **dynamisches System**.
Der Raum der Lösungskurven $x(t)$ nennt man **Phasenraum** und die Lösungskurven auch **Phasenkurven**.

Bemerkung (System erster Ordnung)

Wir schreiben hieraus F so, dass sich eine DGL n -ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zerlegen lassen:

- Die gegebenen $y^{(1)} = f_1(t), y^{(2)} = f_2(t), \dots, y^{(n)} = f_n(t)$,

- Führen wir $x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t), \dots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$,

- Das dynamische System $\dot{x} = F(x, t)$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = F(x_1, \dots, x_n, t)$$

ist äquivalent zur DGL n -ter Ordnung oben.

Bemerkung (Anfangswertproblem)

Für ein dynamisches System $\dot{x} = F(x, t)$ mit einer Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

gibt es ein **Anfangswertproblem (AWP)**.

Satz: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems)

Es gelte:

- Die Funktionen F_1, \dots, F_n seien partiell integrierbar nach x_1, \dots, x_n .
- Die partiellen Ableitungen seien auf einem Rechteck-Gebiet $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig.
- Der Punkt (x_0, t_0) liege im Inneren von B .

Dann gibt es ein Intervall $]t_0 - h, t_0 + h[$, auf dem eine eindeutige Lösung $x(t)$ des dynamischen Systems $\dot{x} = F(x, t)$ existiert, welche $x(t_0) = x_0$ erfüllt.

Definition (Autonomes System)

Hängt die Abbildung F des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{x} = F(x)$$

mit $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann heißt das System **autonomes System**.

Motivation: (Pendel)

- Die Gleichung zur Beschreibung einer Pendelschwingung lautet

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

- Beobachtung: diese Gleichung ist **nichtlinear!**
- Für kleine Auslenkungen φ gilt $\sin \varphi \approx \varphi$.
- Näherungsweise erhält man also die lineare DGL

$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

Definition: (Dynamisches System)

Betrachte die Abbildungen

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

\mathbf{x} differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

mit $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t))^T$, heißt **dy-**
namisches System.

Den Raum der Lösungskurven $\mathbf{x}(t)$ nennt man **Phasenraum** und die Lösungskurven
auch **Phasenkurven**.

Bemerkung: (System erster Ordnung)

Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n -ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, \dots , $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t)$$

ist äquivalent zur DGL n -ter Ordnung oben.

Beispiel: Das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -k \sin x_1 \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zur DGL 2-ter Ordnung

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

Bemerkung: (Anfangswertproblem)

Für ein dynamisches System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ sei eine Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

gegen, so ergibt sich daraus ein **Anfangswertproblem** (AWP).

Satz: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems)

Es gelte:

- Die Funktionen F_1, \dots, F_n seien partiell integrierbar nach x_1, \dots, x_n .
- Die partiellen Ableitungen seien auf einem Rechteck-Gebiet $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig.
- Der Punkt (\mathbf{x}_0, t_0) liege im Inneren von B .

Dann gibt es ein Intervall $]t_0 - h, t_0 + h[$, auf dem eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}(t)$ des dynamischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ existiert, welche $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ erfüllt.

Definition: (Autonomes System)

Hängt die Abbildung \mathbf{F} des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann heißt das System **autonomes System**.

Nichtlineare DGLn

• Nichtlineare DGLn sind schwieriger zu lösen
 • Es gibt keine allgemeine Methode
 • Man muss oft spezielle Methoden verwenden

Beispiel: Löse die DGL $y' + y^2 = 0$ mit $y(0) = 1$.

Lösung: Trennung der Variablen:

$$y' + y^2 = 0 \implies y' = -y^2 \implies \frac{dy}{y^2} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -dx \implies -\frac{1}{y} = -x + C$$

$$\frac{1}{y} = x + C \implies y = \frac{1}{x + C}$$

Einsetzen des Anfangswertes $y(0) = 1$:

$$1 = \frac{1}{0 + C} \implies C = 1$$

Die Lösung ist $y(x) = \frac{1}{x + 1}$.

Orthogonalität

• Orthogonale Funktionen sind wichtig in der Physik und Ingenieurwissenschaften
 • Sie bilden eine Basis für Funktionenräume

Beispiel: Zeige, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ orthogonal sind.

Lösung: Berechne das Skalarprodukt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2x) dx = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ist, sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$ orthogonal.

Differentialgleichungen I

• Lineare DGLn
 • Eigenwertprobleme

Beispiel: Löse die DGL $y'' + y = 0$.

Lösung: Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$.

Entwicklung nach Eigenfunktionen

• Entwicklung von Funktionen in Eigenfunktionen
 • Wichtig für die Lösung von DGLn

Beispiel: Entwickle $f(x) = x$ in Eigenfunktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

Lösung: Nutze die Orthogonalität:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

Bestimme a_n und b_n durch Multiplikation mit $\sin(mx)$ oder $\cos(mx)$ und Integration.

Erinnerung: Selbstadjungierte Differentialoperatoren

• Selbstadjungierte Operatoren sind wichtig für die Theorie der DGLn
 • Sie garantieren reelle Eigenwerte

Beispiel: Zeige, dass $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ selbstadjungiert ist.

Lösung: Berechne $\langle Lf, g \rangle$ und $\langle f, Lg \rangle$:

$$\langle Lf, g \rangle = \int_a^b (-f'')g dx = \int_a^b f'g' dx - [fg]_a^b$$

$$\langle f, Lg \rangle = \int_a^b f(-g'') dx = \int_a^b f'g' dx - [fg]_a^b$$

Da $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$, ist L selbstadjungiert.