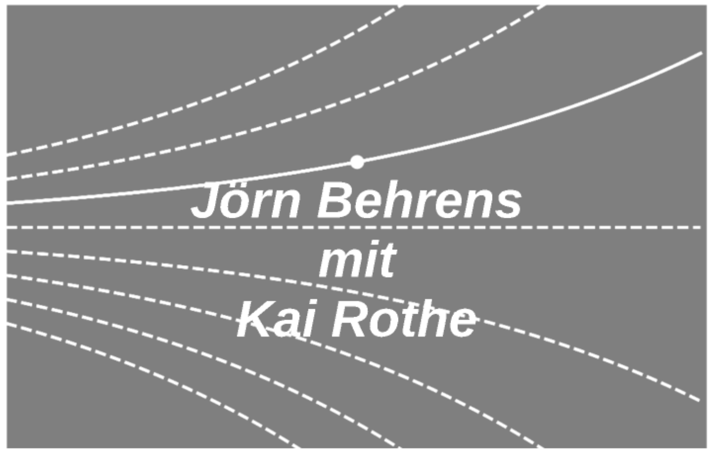
Differentialgleichungen I



Lösung mittels Potenzreihen

Buch Kapitel 6.11-6.12

Erinnerung Laplace-Transformation

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r.

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional},$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.
Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow \quad Y(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)^{-1}R(z) &=: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow \quad y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t,\tau) := g(t-\tau)$ heißt Greensche Funktion.

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r.

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional},$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.
Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow \quad Y(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)^{-1}R(z) &=: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow \quad y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt Greensche Funktion.

Motivation

Idee:

1. Welche weitere Umformung können wir nutzen, um eine DGL zu lösen?
2. Wir erinnern uns an die Potenzreihen (Vereinfachung für $\sin$, $\cos$, $\exp$!).
3. Ableitungen sind einfach zu berechnen (komponentenweise).

1

Idee:

1. Welche weitere Umformung können wir nutzen, um eine DGL zu lösen?
2. Wir erinnern uns an die Potenzreihen (Vereinfachung für $\sin$, $\cos$, $\exp$!).
3. Ableitungen sind einfach zu berechnen (komponentenweise).

Potenzreihen-Ansatz

Zusammenfassung:
Betrachte das AWP

$$y'' + y = \cos(2x), \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

1. Verwende den Ansatz einer Potenzreihe: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
2. Berechne y' und y'' aus diesem Ansatz.
3. Erhalte a_0 und a_1 aus Anfangswerten.
4. Setze Reihen in DGL ein, verwende Potenzreihendarstellung für $\cos$.
5. Führe Koeffizientenvergleich durch und erhalte y als Potenzreihe.
6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y.

Bemerkungen:

- Falls Anwangswerte $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \neq 0$ gegeben sind, dann verwendet man den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

- Im Allgemeinen ist eine geschlossene Form nicht unbedingt zu finden. Dann muss man mit der Potenzreihe von $y(x)$ oder gar ihren ersten Gliedern vorlieb nehmen.
- Der wesentliche Nutzen der Potenzreihe liegt in der “einfachen” Differenzierbarkeit!

Zusammenfassung:
Betrachte das AWP

$$y'' + y = \cos(2x), \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

1. Verwende den Ansatz einer Potenzreihe: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
2. Berechne y' und y'' aus diesem Ansatz.
3. Erhalte a_0 und a_1 aus Anfangswerten.
4. Setze Reihen in DGL ein, verwende Potenzreihendarstellung für $\cos$.
5. Führe Koeffizientenvergleich durch und erhalte y als Potenzreihe.
6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y.

Bemerkungen:

- Falls Anwangswerte $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \neq 0$ gegeben sind, dann verwendet man den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

- Im Allgemeinen ist eine geschlossene Form nicht unbedingt zu finden. Dann muss man mit der Potenzreihe von $y(x)$ oder gar ihren ersten Gliedern vorlieb nehmen.

- Der wesentliche Nutzen der Potenzreihe liegt in der “einfachen” Differenzierbarkeit!

Taylor-Reihe

Idee:
Sei das AWP

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben. Verwende das Taylorpolynom

$$T_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1. Dann erhalte $y(x_0) = y_0$.
2. Weiter berechne $y'(x_0)$ aus der Formel als $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
3. Erhalte y'' durch differenzieren: $y'' = \frac{df}{dx}(x,y)$.
   Um also $y''(x_0)$ zu berechnen:

   $$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0.y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(x_0).$$

4. Fahre sukzessive fort.

Idee:
Sei das AWP

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben. Verwende das Taylorpolynom

$$T_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1. Dann erhalte $y(x_0) = y_0$.
2. Weiter berechne $y'(x_0)$ aus der Formel als $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
3. Erhalte y'' durch differenzieren: $y'' = \frac{df}{dx}(x,y)$.
   Um also $y''(x_0)$ zu berechnen:

   $$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0.y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y'(x_0).$$

4. Fahre sukzessive fort.

Bemerkung: Eine Abschätzung der Genauigkeit ist nicht möglich, da eine allgemeine Formel für $y^{(n)}(x_0)$ nicht bekannt ist.

2

Besselsche Differentialgleichung

Betrachte: Besselsche Differentialgleichung der Ordnung n:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad 0 \leq n \in \mathbb{R}.$$

Ansatz:
Verwende den allgemeinen Potenzreihen-Ansatz

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

mit $a_0 \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$.

Koeffizientenvergleich:
Einsetzen in die DGL und Vergleich der Koeffizienten der Potenzen x^r, x^{r-1}, x^{r+k} ($k = 2, 3, \ldots$) führt auf die Beziehungen:

$$\begin{aligned} (r^2 - n^2)a_0 &= 0 \\ ((r+1)^2 - n^2)a_1 &= 0 \\ (k+r+n)(k+r-n)a_k + a_{k-2} &= 0, \quad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Wegen $a_0 \neq 0$ muss $r = n$ oder $r = -n$ sein (a_0 dann beliebig wählbar!).

Betrachte: Besselsche Differentialgleichung der Ordnung n:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad 0 \leq n \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Diese gewöhnliche DGL entsteht durch Darstellung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten.

Ansatz:
Verwende den allgemeinen Potenzreihen-Ansatz

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

mit $a_0 \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$.

Koeffizientenvergleich:
Einsetzen in die DGL und Vergleich der Koeffizienten der Potenzen x^r, x^{r-1}, x^{r+k} $(k = 2, 3, \ldots)$ führt auf die Beziehungen:

$$\begin{aligned} (r^2 - n^2)a_0 &= 0 \\ ((r+1)^2 - n^2)a_1 &= 0 \\ (k+r+n)(k+r-n)a_k + a_{k-2} &= 0, \quad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Wegen $a_0 \neq 0$ muss $r = n$ oder $r = -n$ sein (a_0 dann beliebig wählbar!).

$$r = n$$

Rekursionsformel:

- Aus $a_0 \neq 0$ und $r = n$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

- Wegen $a_1 = 0$ verschwinden alle a_k mit ungeradem Index: $a_{2k-1} = 0$.
- Konkret erhält man

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(n+1)}, \\ a_4 &= \frac{a_0}{2^4 2(n+1)(n+2)}, \ldots \\ \text{allgemein} \quad a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

Formale Lösung: Wir erhalten die formale Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^n \Big[1 - \frac{1}{1!(n+1)}(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2!(n+1)(n+2)}(\frac{x}{2})^4 + \cdots \\ &+ (-1)^k \frac{1}{k!(n+1)\cdots(n+k)}(\frac{x}{2})^{2k} + \cdots\Big] \end{aligned}$$

Die Reihe in eckigen Klammern ist beständig konvergent (für alle $x \in \mathbb{R}$).

Verwendung der Gamma-Funktion: Verwende die Eigenschaften der Gamma-Funktion $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x > 0)$ und $\Gamma(k+1) = k!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann gilt

$$\frac{1}{k!(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

Also

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1)\cdots(n+k)}(\frac{x}{2})^{2k} \\ &= a_0 2^n \Gamma(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+n} \end{aligned}$$

Bessel-Funktion n-ter Ordnung erster Gattung:
Wähle nun $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ Dann gilt

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+n}$$

ist Lösung der Besselschen DGL

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Rekursionsformel:

- Aus $a_0 \neq 0$ und $r = n$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

- Wegen $a_1 = 0$ verschwinden alle a_k mit ungeradem Index: $a_{2k-1} = 0$.
- Konkret erhält man

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(n+1)}, \\ a_4 &= \frac{a_0}{2^4 2(n+1)(n+2)}, \ldots \\ \text{allgemein} \quad a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

Formale Lösung: Wir erhalten die formale Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^n \Big[1 - \frac{1}{1!(n+1)} (\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2!(n+1)(n+2)} (\frac{x}{2})^4 + \cdots \\ &+ (-1)^k \frac{1}{k!(n+1)\cdots(n+k)} (\frac{x}{2})^{2k} + \cdots \Big] \end{aligned}$$

Die Reihe in eckigen Klammern ist beständig konvergent (für alle $x \in \mathbb{R}$).

Nachweis Beständige Konvergenz: Setze

$$\begin{aligned} u &= (\frac{x}{2})^2, \text{und} \\ b_k &= (-1)^k \frac{1}{k!(n+1)\cdots(n+k)}. \end{aligned}$$

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$ gilt dann

$$\frac{|b_k|}{|b_{k+1}|} = (k+1)(n+k+1), \quad \text{also} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|b_k|}{|b_{k+1}|} = \infty.$$

Nach Satz (2. Semester) ist die Reihe dann für alle $u \in \mathbb{R}$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Verwendung der Gamma-Funktion: Verwende die Eigenschaften der Gamma-Funktion $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x > 0)$ und $\Gamma(k+1) = k!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann gilt

$$\frac{1}{k!(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

Also

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1)\cdots(n+k)} (\frac{x}{2})^{2k} \\ &= a_0 2^n \Gamma(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+n} \end{aligned}$$

Bessel-Funktion n-ter Ordnung erster Gattung:
Wähle nun $a_0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ Dann gilt

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+n}$$

ist Lösung der Besselschen DGL

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

$$r = -n$$

Rekursionsformel:

- Mit $r = -n$ suchen wir also Lösung der Form
$$y(x) = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$
- Aus $a_0 \neq 0$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel
$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-2n)}, \quad k = 2, 3, \ldots$$
(Voraussetzung: $n \neq 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$).

Formale Lösung: Analog zum Vorgehen für $r = n$ erhält man
$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

- Die Formel gilt für $n \neq 0, 1, 2 \ldots$.
- $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen DGL also Fundamentalsystem.
- Für $n \geq 0$, $n \neq 0, 1, 2 \ldots$ ist die allgemeine Lösung der Besselschen DGL gegeben:
$$y(x) = c1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$
- Für Lösungen die für $x \to 0$ beschränkt bleiben, muss $c_2 = 0$ sein, da $J_{-n}(x) = \mathcal{O}(x^{-n})$.

Bessel-Funktion n-ter Ordnung zweiter Gattung

- **Frage**: Lösung für $n = 0, 1, 2, \ldots$?
- **Ansatz**: Setze $-n$ in $J_n(x)$ ein.
- Beachte: für $0 \leq k \leq n-1$ ist $\Gamma(-n+k+1) = \infty$. Setze dann den Koeffizienten zu Null!
- Erhalte:
$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$
- **Fundamentalsystem**: Da $J_{-n}(x)$ in diesen Fällen lin. abhängig ist, muss $J_n(x)$ zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden (Bessel-Funktion zweiter Gattung, oder Weber-Funktion, oder Neumann-Funktion):
$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$
- Man kann zeigen, lim existiert und $J_n(x), Y_n(x)$ bilden Fundamentalsystem.

Allgemeine Lösung der Besselschen DGL:
$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$
ist allgemeine Lösung der Besselschen DGL
$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$
Dabei sind
$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \\ Y_n(x) &= \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \end{aligned}$$

Rekursionsformel:

- Mit $r = -n$ suchen wir also Lösung der Form

$$y(x) = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

- Aus $a_0 \neq 0$ folgt mit dem Koeffizientenvergleich: $a_1 = 0$.
- Außerdem gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-2n)}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

(Voraussetzung: $n \neq 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$).

Formale Lösung: Analog zum Vorgehen für $r = n$ erhält man

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k-n}$$

- Die Formel gilt für $n \neq 0, 1, 2 \ldots$.
- $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen DGL also Fundamentalsystem.
- Für $n \geq 0$, $n \neq 0, 1, 2 \ldots$ ist die allgemeine Lösung der Besselschen DGL gegeben:
$$y(x) = c1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$
- Für Lösungen die für $x \to 0$ beschränkt bleiben, muss $c_2 = 0$ sein, da $J_{-n}(x) = \mathcal{O}(x^{-n})$.

Bessel-Funktion n-ter Ordnung zweiter Gattung:

- **Frage**: Lösung für $n = 0, 1, 2, \ldots$?
- **Ansatz**: Setze $-n$ in $J_n(x)$ ein.
- Beachte: für $0 \leq k \leq n-1$ ist $\Gamma(-n+k+1) = \infty$. Setze dann den Koeffizienten zu Null!
- Erhalte:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k-n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

- **Fundamentalsystem**: Da $J_{-n}(x)$ in diesen Fällen lin. abhängig ist, muss $J_n(x)$ zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden (Bessel-Funktion zweiter Gattung, oder Weber-Funktion, oder Neumann-Funktion):

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

- Man kann zeigen, $\lim$ existiert und $J_n(x), Y_n(x)$ bilden Fundamentalsystem.

Allgemeine Lösung der Besselschen DGL:

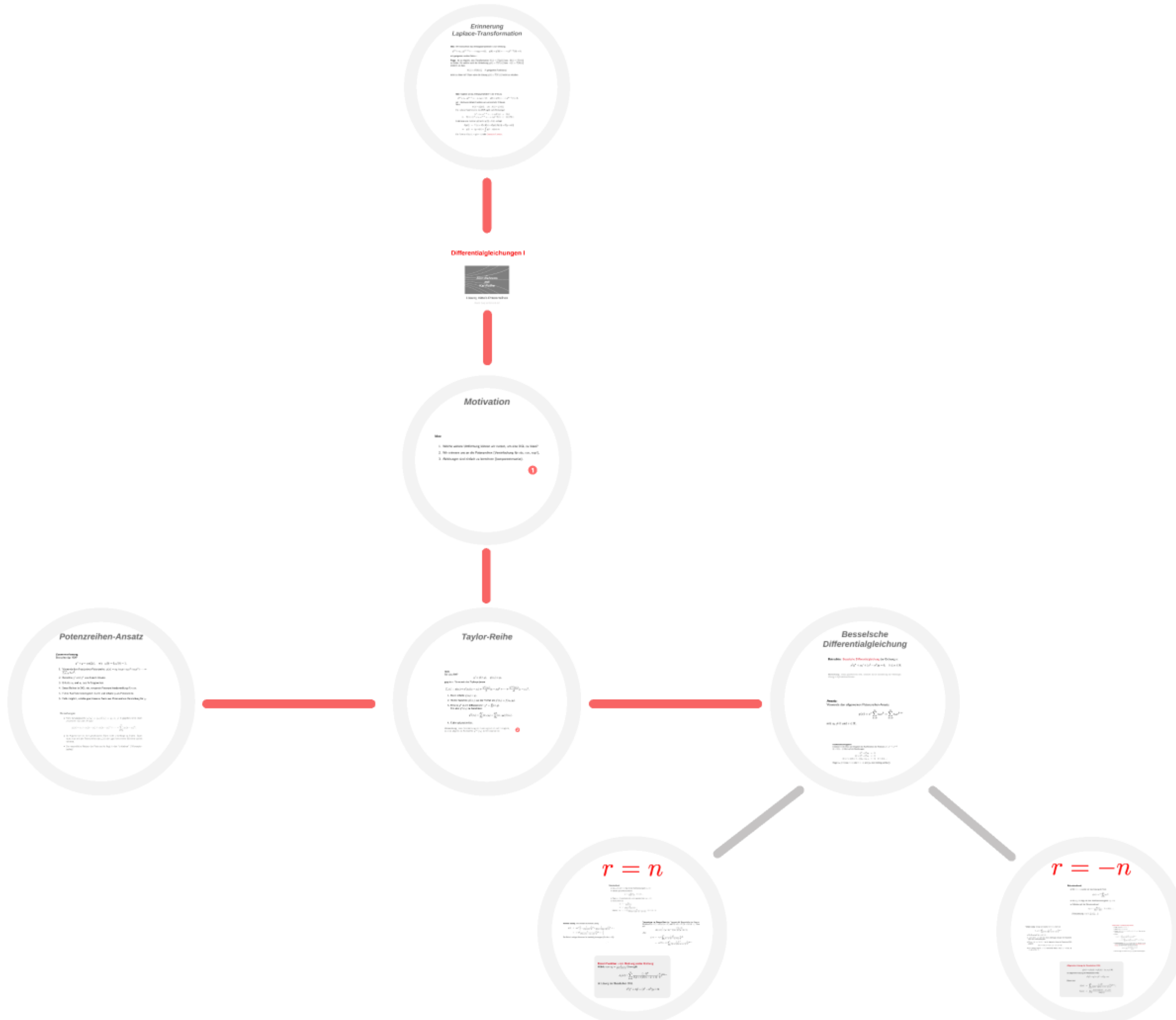
$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ist allgemeine Lösung der Besselschen DGL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+n}, \\ Y_n(x) &= \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \end{aligned}$$


Erinnerung
Laplace-Transformation
Differentialgleichungen I
Motivation
Potenzreihen-Ansatz
Taylor-Reihe
Besselsche
Differentialgleichung
$r = n$
$r = -n$