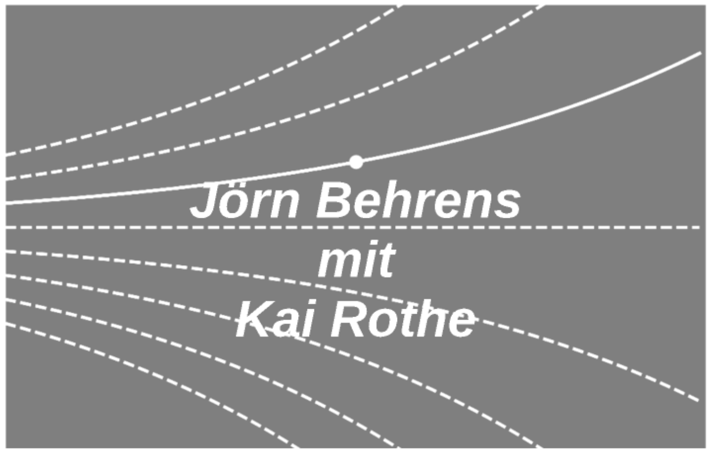
Differentialgleichungen I



Laplace Transformation

Buch Kapitel 11.6-11.9

Motivation

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r.

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional},$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r.

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional},$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Definition Laplace-Transformation

Definition: (Laplace-Transformation)
Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die durch

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

mit $z \in \mathbb{C}$ definierte Funktion F heißt Laplace-Transformierte von f. Die Abbildung von f auf F heißt Laplace-Transformation. Verwende auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$.

Definition: (exponentielle Ordnung)
Eine Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist von exponentieller Ordnung γ, falls Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $0 \leq t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}.$$

Satz: (Existenz der Laplace-Transformierten)
Sei f in $[0, \infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert die Laplace-Transformierte $F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re} z > \gamma$.

Definition: (Laplace-Transformation)
Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die durch

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\; dt$$

mit $z \in \mathbb{C}$ definierte Funktion F heißt Laplace-Transformierte von f. Die Abbildung von f auf F heißt Laplace-Transformation. Verwende auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$.

Fragen:

- Für welche f ist die Laplace-Transformierte sinnvoll?
- Unter welchen Umständen existiert das uneigentliche Integral?

Definition: (exponentielle Ordnung)
Eine Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist von exponentieller Ordnung γ, falls Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $0 \le t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \le M e^{\gamma t}.$$

Bemerkungen:

- Polynome sind von exp. Ordnung.
- $\sin$ und $\cos$ sind von exp. Ordnung.

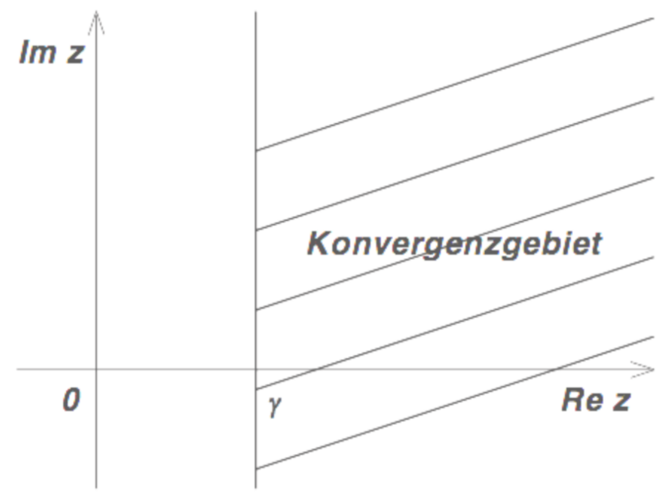
Beispiel: Verwende Taylor-Reihe für $t \ge 0$:

$$|t^3| = t^3 \le 6e^t = 6 + 6t + 3t^2 + t^3 + \cdots$$

Satz: (Existenz der Laplace-Transformierten)
Sei f in $[0,\infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert die Laplace-Transformierte $F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re} z > \gamma$.

Beobachtungen:

- Das Integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$ existiert also in einer rechten Halbebene der Gaußschen Zahlenebene.
- Je schwächer $f(t)$ für $t \to \infty$ wächst, desto weiter reicht der Konvergenzbereich nach links.



Inverse Laplace-Transformation

Satz: (Umkehrsatz für die Laplace-Transformation)
Sei f von exponentieller Ordnung γ, f verschwinde für $t < 0$ und sei in $\mathbb{R}$ stückweise glatt. Dann gilt für alle $x = \mathrm{Re} z > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt}\, dz \;=\; \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x+is) e^{(x+is)t}\, ds = \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (t>0), \\ \frac{f(0+0)}{2} & (t=0), \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x+is) e^{(x+is)t}\, ds \end{aligned}$$

für $x > \gamma$.

Satz: (Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation)
Seien f_1 und f_2 von exponentieller Ordnung γ, f_1, f_2 verschwinden für $t < 0$ und seien in $\mathbb{R}$ stückweise glatt. Es gelte weiter für die Laplace-Transformierten $F_1(x) = F_2(x)$ für $\mathrm{Re} z > \gamma$.
Dann gilt für jeden Punkt t, an dem f_1 und f_2 stetig sind,

$$f_1(t) = f_2(t).$$

Bemerkungen:

- Die beiden Sätze erlauben die Berechnung von $f(t)$ aus einer Laplace-Transformierten $F(z)$ mittels Kurvenintegral in der Gaußschen Zahlenebene.
- Die Laplace-Transformation $f(t) \to F(z)$ ist eine eineindeutige Abbildung.

Beispiel: Zu

$$f(t) = e^{4t}$$

ist die eindeutige Laplace-Transformierte

$$F(z) = \frac{1}{z-4}.$$

Satz: (Umkehrsatz für die Laplace-Transformation)
Sei f von exponentieller Ordnung γ, f verschwinde für $t < 0$ und sei in $\mathbb{R}$ stückweise glatt. Dann gilt für alle $x = \mathrm{Re} z > \gamma$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt}\, dz &= \\
\frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x+is) e^{(x+is)t}\, ds &= \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (t > 0), \\ \frac{f(0+0)}{2} & (t = 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z) e^{zt}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(x+is) e^{(x+is)t}\, ds
\end{aligned}$$

für $x > \gamma$.

Satz: (Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation)
Seien f_1 und f_2 von exponentieller Ordnung γ, f_1, f_2 verschwinden für $t < 0$ und seien in $\mathbb{R}$ stückweise glatt. Es gelte weiter für die Laplace-Transformierten $F_1(x) = F_2(x)$ für $\mathrm{Re} z > \gamma$.
Dann gilt für jeden Punkt t, an dem f_1 und f_2 stetig sind,

$$f_1(t) = f_2(t).$$

Bemerkungen:

- Die beiden Sätze erlauben die Berechnung von $f(t)$ aus einer Laplace-Transformierten $F(z)$ mittels Kurvenintegral in der Gaußschen Zahlenebene.
- Die Laplace-Transformation $f(t) \to F(z)$ ist eine eineindeutige Abbildung.

Beispiel: Zu

$$f(t) = e^{4t}$$

ist die eindeutige Laplace-Transformierte

$$F(z) = \frac{1}{z-4}.$$

Rechenregeln der Laplace-Transformation

Vorbemerkung: Wir bezeichnen mit $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$ die Laplace-Transformierte einer in $[0,\infty[$ stückweise stetigen Funktion von exponentieller Ordnung γ.

Satz: (Linearität)
Seien f und g in $[0,\infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ.
Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

Beweis folgt unmittelbar aus Linearität des Integrals.

Satz: (Transformation der Ableitung und des Integrals)

1. Sei f wie im vorigen Satz. Dann gilt für $\mathrm{Re}\, z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

2. Sei f $(k-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt. Seien $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt für $\mathrm{Re}\, z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = z^k\mathcal{L}[f(t)] - z^{k-1}f(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0).$$

3. Sei f wie in 1. Dann gilt für $\mathrm{Re}\, z > \gamma$

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\, d\tau] = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)].$$

Satz: (Laplace-Transformation eines Produktes mit einer Potenzfunktion)
Sei $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ und f Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(z).$$

Satz: (Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion) Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, und habe f an der Stelle $t = a > 0$ eine Unstetigkeit in Form einer Sprungstelle. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-az}.$$

Beweisskizze: spalte das Integral

$$\int_0^\infty e^{-zt} f'(t)\, dt$$

auf in $\int_0^{a-0}(\cdot) + \int_{a+0}^{\infty}(\cdot)$, verfahre ansonsten analog zum Satz oben.

Satz: (Laplace-Transformation einer T-periodischen Funktion)
Sei f T-periodisch (d.h. $f(t-T) = f(t)$), stückweise stetig und beschränkt.
Dann gilt für $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \int_0^T e^{-zu} f(u)\, du.$$

Satz: (Dämpfung-Verschiebung, Streckung)
Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, $F(z) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$, $\mathrm{Re}\, z > \gamma$.

1. Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich:

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(z+a) \quad \text{für } \mathrm{Re}\, z > \gamma - a.$$

2. Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{z}{a}) \quad \text{für } \mathrm{Re}\, z > a \cdot \gamma.$$

Satz: (Faltungsregel)
Seien f und g Funktionen von exponentieller Ordnung γ mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Sei f stetig und g stückweise stetig auf $\mathbb{R}$. Dann existiert die Laplace-Transformierte der Faltung $f * g$ für $\mathrm{Re}\, z > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Definition: (Faltung)
Seien f und g Funktionen. Das Faltungsprodukt von f und g ist allgemein definiert als

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen:

- Wir setzen jeweils voraus, dass das uneigentliche Integral existiert.
- Für f und g Funktionen wie in der Laplace-Transformation gilt $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Daher ist dann

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$$

Vorbemerkung: Wir bezeichnen mit $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$ die Laplace-Transformierte einer in $[0, \infty[$ stückweise stetigen Funktion von exponentieller Ordnung γ.

Satz: (Linearität)
Seien f und g in $[0, \infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ.
Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

Beweis folgt unmittelbar aus Linearität des Integrals.

Satz: (Transformation der Ableitung und des Integrals)

1. Sei f wie im vorigen Satz. Dann gilt für $\mathrm{Re} z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

2. Sei f $(k-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt. Seien $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt für $\mathrm{Re} z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = z^k\mathcal{L}[f(t)] - z^{k-1}f(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0).$$

3. Sei f wie in 1. Dann gilt für $\mathrm{Re} z > \gamma$

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\ d\tau] = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)].$$

Beweis:

1. Folgt aus der Definition der Laplace-Transformierten mittels partieller Integration

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-zt} f'(t)\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} e^{-zt} f(t)|_{t=0}^{t=A} - \int_0^\infty (-z) e^{-zt} f(t)\, dt \\
&= -f(0) + z \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0).
\end{aligned}
$$

2. k-maliges Anwenden der obigen partiellen Integration führt zur Aussage.

3. Wende 1. auf die Funktion $h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ an.

Satz: (Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion) Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, und habe f an der Stelle $t = a > 0$ eine Unstetigkeit in Form einer Sprungstelle. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-az}.$$

Beweisskizze: spalte das Integral

$$\int_0^\infty e^{-z} f'(t)\, dt$$

auf in $\int_0^{a-0}(\cdot) + \int_{a+0}^\infty(\cdot)$, verfahre ansonsten analog zum Satz oben.

Satz: (Dämpfung-Verschiebung, Streckung)
Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, $F(z) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-z} f(t)\, dt$, $\mathrm{Re} z > \gamma$.

1. Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich:

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(z+a) \quad \text{für } \mathrm{Re} z > \gamma - a.$$

2. Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{z}{a}) \quad \text{für } \mathrm{Re} z > a \cdot \gamma.$$

Definition: (Faltung)
Seien f und g Funktionen. Das Faltungsprodukt von f und g ist allgemein definiert als

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\ d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen:

- Wir setzen jeweils voraus, dass das uneigentliche Integral existiert.
- Für f und g Funktionen wie in der Laplace-Transformation gilt $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Daher ist dann

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\ d\tau = \int_{0}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\ d\tau$$

Satz: (Faltungsregel)
Seien f und g Funktionen von exponentieller Ordnung γ mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Sei f stetig und g stückweise stetig auf $\mathbb{R}$. Dann existiert die Laplace-Transformierte der Faltung $f * g$ für $\mathrm{Re} z > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Satz: (Laplace-Transformation einer T-periodischen Funktion)
Sei f T-periodisch (d.h. $f(t-T) = f(t)$), stückweise stetig und beschränkt.
Dann gilt für $\mathrm{Re}z > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Tz}} \int_0^T e^{-zu} f(u)\, du.$$

Satz: (Laplace-Transformation eines Produktes mit einer Potenzfunktion)
Sei $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ und f Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(z).$$

Lösung von DGLn mittels Laplace-Transformation

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.
Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow \quad Y(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)^{-1}R(z) &=: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow \quad y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt Greensche Funktion.

1

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.
Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

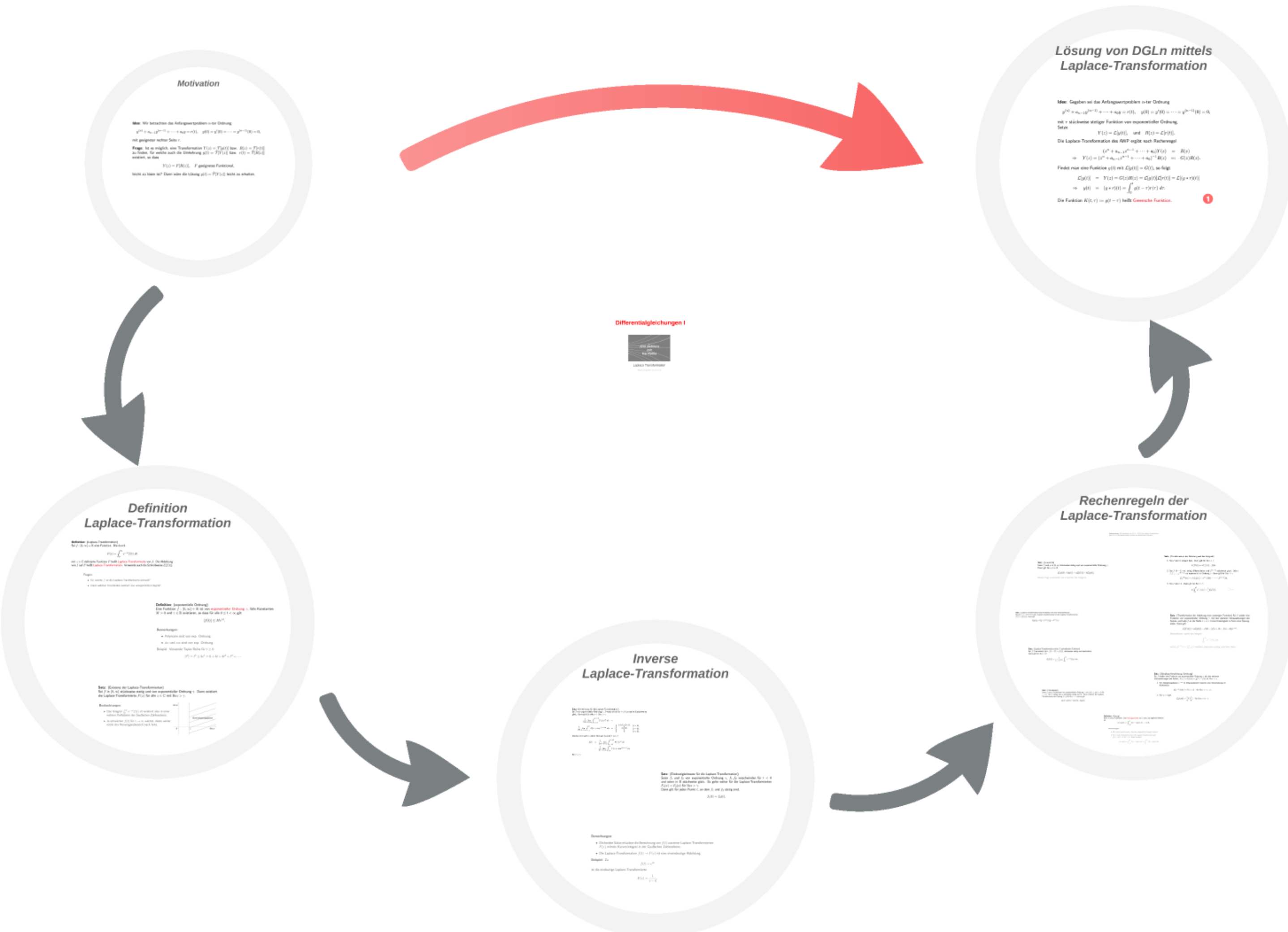
Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow \quad Y(z) = (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)^{-1}R(z) &=: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow \quad y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt Greensche Funktion.


Motivation
Definition Laplace-Transformation
Inverse Laplace-Transformation
Rechenregeln der Laplace-Transformation
Lösung von DGLn mittels Laplace-Transformation
Differentialgleichungen I