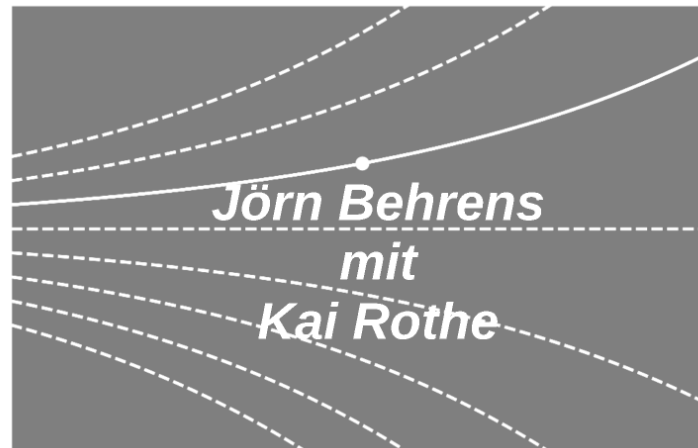


Differentialgleichungen I



Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Buch Kapitel 6.8

Wo wir jetzt stehen

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien Funktionen $a_{ij}(x)$, $i, j = 0, \dots, n-1$ und $g(x)$ stetig auf $[a, b]$.
 1. Dann gibt es ein auf $[a, b]$ definiertes Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n , von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$
 und jede Lösung $y(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$
 mit geeigneten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .
 2. Je n Lösungen der homogenen DGL, bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
 3. Sei $y_p(x)$ für $x \in [a, b]$ eine partikuläre Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$
 Mit y_1, \dots, y_n Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$
 alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n-ter Ordnung erfasst.
 4. Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

$$y(x) = y_0, \quad y'(x) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$$
 erfüllt. Die Lösung existiert in ganzem Intervall $[a, b]$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
 Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) v .
 Dann ist

$$y = e^{\lambda x} v$$
 eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $y' = Ay$.
 Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV v_1, \dots, v_n , dann bilden die Lösungen

$$y_i = e^{\lambda_i x} v_i, \quad i = 1, \dots, n$$
 ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_i$$
 sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)
 Es seien gegeben:

- y_1, \dots, y_n Fundamentalsystem auf $[a, b]$,
- Die Matrix $Y(x) = [y_1 \dots y_n]$,
- Inhomogenes System $y' = A(x)y + g$ mit g komponentenweise stetig.

 Dann ist

$$y_p = Y(x) \cdot c(x)$$
 partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $c(x) = \int e^{\int A(x) dx} g(x) dx$ und $e^{\int A(x) dx} = (e_1^{\int A(x) dx}, \dots, e_n^{\int A(x) dx})^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y'(x) \cdot c(x) = g.$$

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)
 Die Abbildung $y(x) = e^{xA}y(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$y' = Ay.$$
 Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n - 1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es ein auf $]a, b[$ definiertes Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung $y_h(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .

2. Je n Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

Ist y_1, \dots, y_n Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n -ter Ordnung erfasst.

4. Ist $\xi \in]a, b[$ und $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$,
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$,
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x) dx$
und $\mathbf{c}'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)

Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) \mathbf{v} .

Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

Reduktionsprinzip

Prinzip: (Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung)
Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0.$$

Dann führt der Produkt-Ansatz $y(x) = v(x)u(x)$ auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n - 1$ für $w := v'$:

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \dots + b_1(x)w = 0.$$

Ist w_1, \dots, w_{n-1} ein Fundamentalsystem der DGL $n - 1$ -ter Ordnung und sind v_1, \dots, v_{n-1} Stammfunktionen von w_1, \dots, w_{n-1} , so bilden

$$u, uv_1, \dots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der DGL n -ter Ordnung.

Prinzip: (Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung)

Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0.$$

Dann führt der Produkt-Ansatz $y(x) = v(x)u(x)$ auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n - 1$ für $w := v'$:

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \dots + b_1(x)w = 0.$$

Ist w_1, \dots, w_{n-1} ein Fundamentalsystem der DGL $n - 1$ -ter Ordnung und sind v_1, \dots, v_{n-1} Stammfunktionen von w_1, \dots, w_{n-1} , so bilden

$$u, uv_1, \dots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der DGL n -ter Ordnung.

Definition: (Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Seien $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n - 1$. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x).$$

eine **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Bemerkungen:

- Bei den linearen DGLn bzw. DGL Systemen mit konstanten Koeffizienten existiert eine konstruktive Lösungstheorie!
- Definiere den linearen **Differentialausdruck** (oder **-operator**)

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y,$$

dann lässt sich die Gleichung in der Definition abkürzen zu $L[y] = g(x)$.

- Bezeichne (bei Eindeutigkeit) die Gleichungen als *homogene DGL n -ter Ordnung*, bzw. *inhomogene DGL n -ter Ordnung*.

Beobachtung:

- Betrachte homogene DGL n -ter Ordnung.
- Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- Es gilt: $y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$ und $y = e^{\lambda x} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Daher ist $y = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung ($g = 0$), wenn λ Nullstelle ist von

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Definition: (Charakteristisches Polynom)

Das soeben definierte Polynom $P(\lambda)$ heißt **charakteristisches Polynom** der homogenen Differentialgleichung $L[y] = 0$.

Die Nullstellengleichung $P(\lambda) = 0$ heißt zugehörige **charakteristische Gleichung**.

Lösungsansatz:

Untersuchung des Nullstellenverhaltens von $P(\lambda)$ ergibt folgende Fälle:

1. $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
2. $P(\lambda)$ besitzt eine komplexe Nullstelle λ_k .
3. $P(\lambda)$ besitzt eine (reelle oder komplexe) r -fache Nullstelle λ_1 ($r \geq 2$).



Zusammenfassung:

Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \dots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Bemerkungen:

- Man findet, dass stets n linear unabhängige Lösungen $y_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) existieren.
- Diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem (Nachweis über $W(x) \neq 0$ für Lösungen der Form $y_k(x) = c_k e^{\lambda_k x}$)



Inhomogene DGL n-ter Ordnung

Vorbemerkungen:

- Betrachte beispielhaft $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$.
- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ lin. unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (d.h. $g(x) = 0$).
- Also gilt $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$.
- Die Lösungen der homogenen Gleichung lauten dann $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

3

Zusammenfassung: (Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung)

Betrachte die inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

Dann lässt sich die allgemeine Lösung angeben als

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} dx \right] y_1(x) + \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} dx \right] y_2(x).$$

Bemerkung: Setze $C_3 = C_1 = 0$ da nur irgendeine Lösung gesucht ist.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung)

- Für Gleichung n-ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \dots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen $C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2)$.
- Außerdem erhalten wir $C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x)$.
- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$:
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$
- Bemerkung: Wronski-Matrix ist regulär, also lösbar!
- Integration führt dann zur gesuchten Lösung

Vorbemerkungen:

- Betrachte beispielhaft

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ lin. unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (d.h. $g(x) = 0$).
- Also gilt

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

- Die Lösungen der homogenen Gleichung lauten dann

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

3

Zusammenfassung: (Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung)
Betrachte die inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

Dann lässt sich die allgemeine Lösung angeben als

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} dx \right] y_1(x) + \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} dx \right] y_2(x).$$

Bemerkung: Setze $C_3 = C_4 = 0$ da nur irgendeine Lösung gesucht ist.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n -ter Ordnung)

- Für Gleichung n -ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \dots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C_1'(x)y_1^{(k)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wronski-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ziele: Das Fundamentalsystem einer linearen DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmen.

Definition: Eine lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$.

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ führt zu $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

Wurzeln: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Nullstellen von $P(\lambda)$.

Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$ (falls alle λ_i reell und verschieden sind).

Wiederholwurzeln: Falls λ_i eine m_i -fache Wurzel ist, dann sind $y_1(x) = x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}, \dots, y_{m_i}(x) = x^{m_i}e^{\lambda_i x}$ Fundamentalsystem.

Reduktionsprinzip

Prinzip (Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung)
 Sei $y(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Dann gilt die Produkt-Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$ auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ für $v(x)$.

Sei $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ eine Fundamentallösung der DGL $n-1$ ter Ordnung und $y_2(x), \dots, y_{n-1}(x)$ Störansätze von $y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$ der Klasse \mathcal{C}^{n-1} ein Fundamentalsystem der DGL $n-1$ ter Ordnung.

Differentialgleichungen I



Wo wir jetzt stehen

1. Ordnung: $y' + p(x)y = q(x)$. Lösung durch Trennung der Variablen oder Integrationsfaktoren.

2. Ordnung: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$. Lösung durch Reduktion der Ordnung.

3. Ordnung: $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x)$. Lösung durch Reduktion der Ordnung.

4. n-ter Ordnung: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$. Lösung durch Reduktion der Ordnung.

5. Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$. Lösung durch Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$.

6. Inhomogene DGL n-ter Ordnung: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$. Lösung durch Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$.

Inhomogene DGL n-ter Ordnung

Ansatz: $y(x) = v(x)y_1(x)$ führt zu $v^{(n-1)} + \dots + p_1(x)v' + p_0(x)v = f(x)/y_1(x)$.

Wiederholwurzeln: Falls λ_i eine m_i -fache Wurzel ist, dann sind $y_1(x) = x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}, \dots, y_{m_i}(x) = x^{m_i}e^{\lambda_i x}$ Fundamentalsystem.

Wiederholwurzeln: Falls λ_i eine m_i -fache Wurzel ist, dann sind $y_1(x) = x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}, \dots, y_{m_i}(x) = x^{m_i}e^{\lambda_i x}$ Fundamentalsystem.