Differentialgleichungen I

Woche 05 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!

PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

- VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
- GENESENE
- GETESTETE

(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

- FULLY VACCINATED
- RECOVERED
- TESTED

(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

1 **Vorbemerkung**: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

- Verwende dazu die Matrix-Exponentialfunktion

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^B ist eine $(n \times n)$-Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

- $e^{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$ $\qquad B \in \mathbb{R}/\mathbb{C}^{n\times n}$

- $B = xA \longrightarrow e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$ $\qquad x \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

- gliedweise Differentiation und Index-Verschiebung:

$$(e^{xA})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = A e^{xA}$$

- Also: $y(x) = e^{xA}\, y(0)$ ist Lösung von $y' = Ay$.

- Sei nun λ EW von A mit EV $\vec{v}$, d.h. $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

$$\Rightarrow e^{xA}\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k \vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \lambda^k \vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \vec{v} = e^{\lambda x}\vec{v}$$

<u>Aussage:</u> Matrix-Exponential-Lösung ist durch ein Eigenwertproblem ersetzt
wir benötigen keine Matrix-Potenzen

- Es gilt: $e^{\lambda x E} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} E^k = e^{\lambda x} E$ $\qquad E$: Einheitsmatrix

- Damit: für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$:

$$e^{xA}\vec{v} = e^{\lambda x E + x(A-\lambda E)}\vec{v} = e^{\lambda x E}\, e^{x(A-\lambda E)}\, \vec{v}$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (A-\lambda E)^k\, \vec{v}$$

- Falls $\vec{v}$ Hauptvektor von $(A-\lambda E)^k \vec{v} = 0$ ist

$$\Rightarrow e^{xA}\vec{v} = e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}(A-\lambda E)^j\,\vec{v} \qquad \text{endl. } \underline{\text{Summe}}!$$

damit ist $y = e^{xA}\vec{v}$ Hauptvektorlösung.

② Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x' = y \\ y' = -x \end{matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

mit $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Berechne Matrix-Exponenten:

$$A^0 = E, \; A^1 = A, \; A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A, \; A^6 = A^2, \; \dots, \; A^{k+4} = A^k \quad \text{für } k \geq 1$$

-

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{y} = \left[E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - + \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + - \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - + \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

3

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)
Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$,
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n]$,
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\, dx$ und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^\top$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$

3

- Zunächst verstehen wir unter $\int \vec{c}\,'(x)\, dx$ komponentenweise Integration, d.h.

$$\int \vec{c}\,'(x)\, dx = \begin{pmatrix} \int c_1'(x)\, dx \\ \vdots \\ \int c_n'(x)\, dx \end{pmatrix} \qquad y' = Ay$$

- Jetzt: partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (c_1(x)\vec{y}_1 + \cdots + c_n(x)\vec{y}_n)' \\ &= c_1'(x) y_1 + \cdots + c_n'(x) y_n + c_1(x) y_1' + \cdots + c_n(x) y_n' \\ &= Y(x) \cdot \vec{c}\,'(x) + A\,(c_1(x) y_1 + \cdots + c_n(x) y_n) \\ &= Y(x) \cdot \vec{c}\,'(x) + A\, y_p(x) \qquad \Big|\ \text{ich weiß } Y(x) \cdot c'(x) = g(x) \\ &= g + A y_p(x) \end{aligned}$$