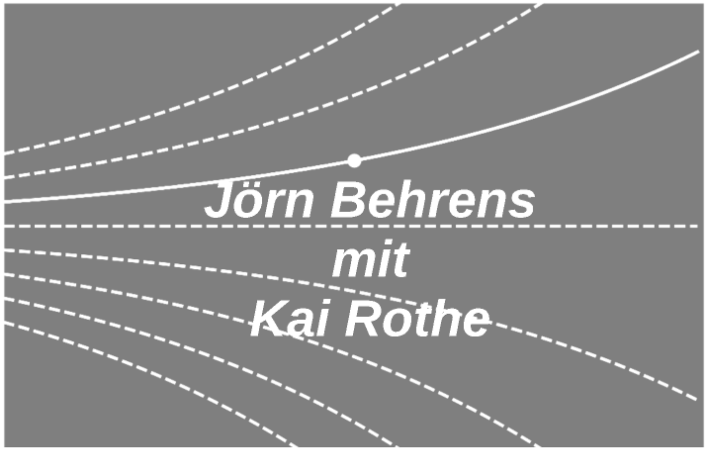
Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme – Matrix-Exponentiallösung
Lineare DGL n-ter Ordnung

Buch Kapitel 6.7-6.8

Erinnerung:
Lineares DGL-Sytem 1. Ordnung

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und $\mathbf{y}$ und $\mathbf{g}$ Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von g seien stetig im Intervall $]a,b[$. Sei weiter $x_0 \in]a,b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a,b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a,b[$, dann besitzt das inhomogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a,b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz: (Wronski-Test)
Seien $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a,b[$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a,b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a,b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Satz: (Hauptvektorlösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$-Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!}(A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Sytems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und $\mathbf{y}$ und $\mathbf{g}$ Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Bemerkungen:

- Differentialgleichungen k-ter Ordnung lassen sich zu Systemen von k Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!
  Idee: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, etc.
- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von g seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das inhomogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz: (Wronski-Test)
Seien $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a, b[$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Satz: (Hauptvektorlösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$-Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \ldots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Sytems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Matrix-Exponentiallösung

Vorbemerkung: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$
- Verwende dazu die Matrix-Exponentialfunktion
$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$
- e^B ist eine $(n \times n)$-Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

1

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)
Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$
Dabei ist
$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2

Vorbemerkung: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

- Verwende dazu die Matrix-Exponentialfunktion

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^B ist eine $(n \times n)$-Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)
Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2

Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

Vorbemerkung: Lösung erfolgt in zwei Schritten:

1. Lösung des homogenen Systems
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

Satz: (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)
Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$
- Homogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems: $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$
- Lösung des homogenen Systems: $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$
- Irgendeine Lösung des inhomogenen Systems: $\mathbf{y}_p$

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen System die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)
Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$.
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n]$.
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\, dx$
und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^\top$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$

3

Vorbemerkung: Lösung erfolgt in zwei Schritten:

1. Lösung des homogenen Systems
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

Satz: (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)
Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$
- Homogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems: $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$
- Lösung des homogenen Systems: $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$
- Irgendeine Lösung des inhomogenen Systems: $\mathbf{y}_p$

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen System die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)
Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$,
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n]$,
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

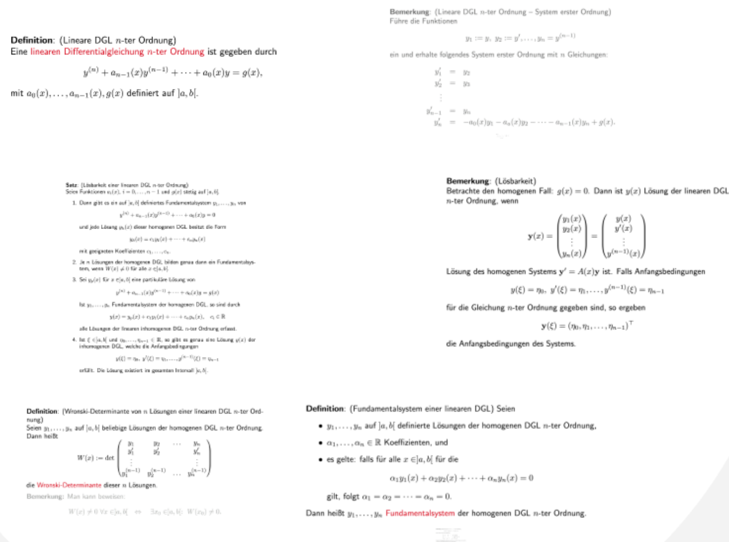
$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\ dx$ und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^\top$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$

3

Lineare DGL
n-ter Ordnung



Definition: (Lineare DGL n-ter Ordnung)
Eine linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x),$$

mit $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x), g(x)$ definiert auf $]a, b[$.

Bemerkung: (Lineare DGL n-ter Ordnung – System erster Ordnung)
Führe die Funktionen

$$y_1 := y,\ y_2 := y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$$

ein und erhalte folgendes System erster Ordnung mit n Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_a(x)y_2 - \cdots - a_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{aligned}$$

Bemerkung: Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

entspricht die lineare DGL n-ter Ordnung also dem System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

Bemerkung: (Lösbarkeit)
Betrachte den homogenen Fall: $g(x) = 0$. Dann ist $y(x)$ Lösung der linearen DGL n-ter Ordnung, wenn

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ ist. Falls Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0,\ y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

für die Gleichung n-ter Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$\mathbf{y}(\xi) = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})^\top$$

die Anfangsbedingungen des Systems.

Definition: (Fundamentalsystem einer linearen DGL) Seien

- $y_1, \ldots, y_n$ auf $]a, b[$ definierte Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung,
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, und
- es gelte: falls für alle $x \in]a, b[$ für die

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

gilt, folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Dann heißt $y_1, \ldots, y_n$ Fundamentalsystem der homogenen DGL n-ter Ordnung.

Bemerkung: Differentiation [für $k = 1, 2, \ldots, n-1$] der Gleichung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet.

Bemerkung: Differentiation (für $k = 1, 2, \ldots, n-1$) der Gleichung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet.

Definition: (Wronski-Determinante von n Lösungen einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien $y_1, \ldots, y_n$ auf $]a, b[$ beliebige Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung. Dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante dieser n Lösungen.

Bemerkung: Man kann beweisen:

$$W(x) \neq 0 \;\forall x \in]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in]a, b[:\; W(x_0) \neq 0.$$

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es ein auf $]a, b[$ definiertes Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ von

   $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

   und jede Lösung $y_h(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form

   $$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

   mit geeigneten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$.

2. Je n Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von

   $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

   Ist $y_1, \ldots, y_n$ Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

   $$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

   alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n-ter Ordnung erfasst.

4. Ist $\xi \in]a, b[$ und $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

   $$y(\xi) = \eta_0, \ y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

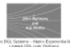
   erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

Lineare DGL n-ter Ordnung

Erinnerung: Lineares DGL-Sytem 1. Ordnung

Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme – Matrix-Exponentiallösung
Lineare DGL n-ter Ordnung

Matrix-Exponentiallösung

Vorbemerkung: [Exponential-Lösung]

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$y' = Ay.$$

- Verwende dazu die Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^{B} ist eine $(n \times n)$-Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

1

Zusammenfassend: [Matrix-Exponentiallösung]
Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2