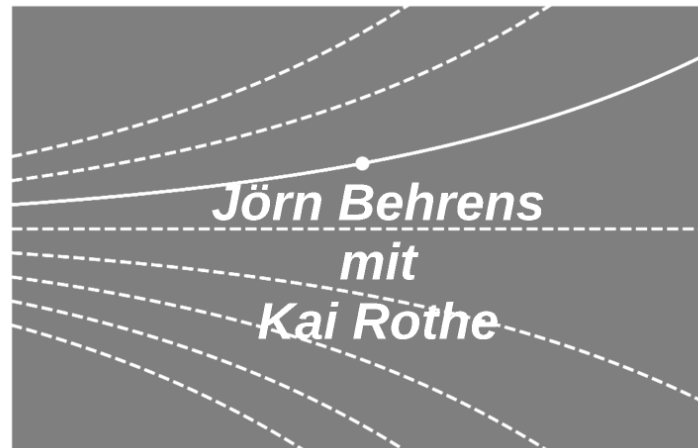


Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme – Matrix-Exponentiallösung

Lineare DGL n-ter Ordnung

Buch Kapitel 6.7-6.8

Erinnerung: Lineares DGL-System 1. Ordnung

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von g seien stetig im Intervall $[a, b]$. Sei weiter $x_0 \in [a, b]$ und $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y + g, \quad y(x_0) = y_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)
Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $[a, b]$, dann besitzt das inhomogene System

$$y' = A(x)y$$

auf $[a, b]$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g, \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und y und g Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $g = 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Satz: (Wronski-Test)
Seien y_1, \dots, y_n Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ auf $[a, b]$. Falls $w(x)$ stetig in $[a, b]$, dann gilt

- $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Die Lösungen y_1, \dots, y_n bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Satz: (Hauptvektorklösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und v_1, \dots, v_σ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^{\sigma} v = 0.$$

Dann sind

$$y_k = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j v_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung $y' = Ay$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) v .
Dann ist

$$y = e^{\lambda x} v$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $y' = Ay$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV v_1, \dots, v_n , dann bilden die Lösungen

$$y_i = e^{\lambda_i x} v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und \mathbf{y} und \mathbf{g} Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Bemerkungen:

- Differentialgleichungen k -ter Ordnung lassen sich zu Systemen von k Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!
Idee: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, etc.
- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von \mathbf{g} seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das inhomogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz: (Wronski-Test)

Seien $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a, b[$.

Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)

Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) \mathbf{v} .

Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Satz: (Hauptvektorklösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Matrix-Exponentiallösung

Vorbemerkung: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$y' = Ay.$$

- Verwende dazu die **Matrix-Exponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^B ist eine $(n \times n)$ -Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

1

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung $y(x) = e^{xA}y(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$y' = Ay.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2

Vorbemerkung: (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL $y' = ay$ gibt es die Lösung $y(x) = e^{ax}y(0)$.
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

- Verwende dazu die **Matrix-Exponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- e^B ist eine $(n \times n)$ -Matrix, wenn B eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!



Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$



Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

Vorbemerkung: Lösung erfolgt in zwei Schritten:
1. Lösung des homogenen Systems
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

Satz (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)

Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System: $y' = A(x)y + g$
- Homogenes lineares System: $y' = A(x)y$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems: y_1, \dots, y_n
- Lösung des homogenen Systems: $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$
- Irreguläre Lösung des inhomogenen Systems: y_p

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- y_1, \dots, y_n Fundamentalsystem auf $[a, b]$,
- Die Matrix $Y(x) = [y_1 \dots y_n]$,
- Inhomogenes System $y' = A(x)y + g$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$y_p = Y(x) \cdot c(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $c(x) = \int c'(x) dx$
und $c'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot c'(x) = g.$$

3

Vorbemerkung: Lösung erfolgt in zwei Schritten:

1. Lösung des homogenen Systems
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

Satz: (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)

Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$
- Homogenes lineares System: $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems: $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$
- Lösung des homogenen Systems: $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n$
- Irgendeine Lösung des inhomogenen Systems: \mathbf{y}_p

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen System die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$,
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$,
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x) dx$
und $\mathbf{c}'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$



Lineare DGL n-ter Ordnung

Definition: (Lineare DGL n-ter Ordnung)
Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x),$$

mit $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), g(x)$ definiert auf $]a, b[$.

Satz: (Existenz einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien Funktionen $a_j(x), j = 0, \dots, n-1$ und $g(x)$ beliebig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es in a auf $]a, b[$ definierte Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n , von $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$ und jede Lösung $y(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ mit gewissen Konstanten c_1, \dots, c_n .
2. In a Lösungen der homogenen DGL sind genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(y_1, \dots, y_n)(a) \neq 0$ gilt.
3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$.
Ist y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch $W(y_1, \dots, y_n, y_p)(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x), c_i \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der inhomogenen DGL, und diese bilden ein Fundamentalsystem.
4. Ist $I \subset]a, b[$ und $W(y_1, \dots, y_n, y_p)(x) \neq 0$ in I , so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen $y(x) = y_1(x) = y_2(x) = \dots = y_{n-1}(x) = 0$ erfüllt. Die Lösung existiert in ganzem Intervall $]a, b[$.

Definition: (Wronski-Determinante von n Lösungen einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien y_1, \dots, y_n auf $]a, b[$ beliebige Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung. Dann heißt

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** dieser n Lösungen.

Bemerkung: Man kann beweisen:
 $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0 \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_n \in W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$.

Bemerkung: (Lineare DGL n-ter Ordnung – System erster Ordnung)
Führe die Funktionen

$$y_1 := y, y_2 := y', \dots, y_n := y^{(n-1)}$$

ein und erhalte folgendes System erster Ordnung mit n Gleichungen:

$$\begin{matrix} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ & \vdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \dots - a_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{matrix}$$

Bemerkung: (Lösbarkeit)
Betrachte den homogenen Fall: $g(x) = 0$. Dann ist $y(x)$ Lösung der linearen DGL n-ter Ordnung, wenn

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems $y' = A(x)y$ ist. Falls Anfangsbedingungen

$$y(x) = y_0, y'(x) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$$

für die Gleichung n-ter Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$y(x) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})^T$$

die Anfangsbedingungen des Systems.

Definition: (Fundamentalsystem einer linearen DGL) Seien

- y_1, \dots, y_n auf $]a, b[$ definierte Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung,
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, und
- es gelte: falls für alle $x \in]a, b[$ für die $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$

gilt, folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Dann heißt y_1, \dots, y_n **Fundamentalsystem** der homogenen DGL n-ter Ordnung.

Definition: (Lineare DGL n -ter Ordnung)

Eine **linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung** ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x),$$

mit $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), g(x)$ definiert auf $]a, b[$.

Bemerkung: (Lineare DGL n -ter Ordnung – System erster Ordnung)
Führe die Funktionen

$$y_1 := y, y_2 := y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

ein und erhalte folgendes System erster Ordnung mit n Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \dots - a_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{aligned}$$



Bemerkung: Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

entspricht die lineare DGL n -ter Ordnung also dem System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

Bemerkung: (Lösbarkeit)

Betrachte den homogenen Fall: $g(x) = 0$. Dann ist $y(x)$ Lösung der linearen DGL n -ter Ordnung, wenn

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ ist. Falls Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

für die Gleichung n -ter Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$\mathbf{y}(\xi) = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})^\top$$

die Anfangsbedingungen des Systems.

Definition: (Fundamentalsystem einer linearen DGL) Seien

- y_1, \dots, y_n auf $]a, b[$ definierte Lösungen der homogenen DGL n -ter Ordnung,
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, und
- es gelte: falls für alle $x \in]a, b[$ für die

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

gilt, folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Dann heißt y_1, \dots, y_n **Fundamentalsystem** der homogenen DGL n -ter Ordnung.

Bemerkung: Differentialgleichung (1) mit $a = -\infty, b = +\infty$ der Gleichung
 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
führt auf das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Zeilenvektoren der Koeffizientenmatrix nicht linear abhängig sind.

Bemerkung: Differentiation (für $k = 1, 2, \dots, n - 1$) der Gleichung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & & y'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet.

Definition: (Wronski-Determinante von n Lösungen einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien y_1, \dots, y_n auf $]a, b[$ beliebige Lösungen der homogenen DGL n -ter Ordnung. Dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** dieser n Lösungen.

Bemerkung: Man kann beweisen:

$$W(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in]a, b[: \quad W(x_0) \neq 0.$$

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n -ter Ordnung)

Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n-1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es ein auf $]a, b[$ definiertes Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung $y_h(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .

2. Je n Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

Ist y_1, \dots, y_n Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n -ter Ordnung erfasst.

4. Ist $\xi \in]a, b[$ und $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

Lineare DGL n-ter Ordnung

Definition: Eine DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

heißt **homogen**, falls $b(x) = 0$ ist. Sonst heißt sie **inhomogen**.

Beispiel: $y'' + y = 0$ ist eine homogene DGL 2. Ordnung. $y'' + y = \sin(x)$ ist eine inhomogene DGL 2. Ordnung.

Wichtig: Die Lösungsmenge einer homogenen DGL n-ter Ordnung ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist ein $(n-1)$ -dimensionaler Affinraum.

Struktur: Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist die Summe einer Partikulärlösung und der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL.

Wichtig: Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist die Summe einer Partikulärlösung und der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL.

Wichtig: Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist die Summe einer Partikulärlösung und der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL.

Erinnerung: Lineares DGL-System 1. Ordnung

Definition: Ein lineares DGL-System 1. Ordnung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

heißt **homogen**, falls $b(x) = 0$ ist. Sonst heißt es **inhomogen**.

Wichtig: Die Lösungsmenge einer homogenen DGL n-ter Ordnung ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist ein $(n-1)$ -dimensionaler Affinraum.

Struktur: Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist die Summe einer Partikulärlösung und der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL.

Differentialgleichungen I



Matrix-Exponentiallösung

- Voraussetzung:** (Exponentiallösung)
- $A(x)$ ist eine $n \times n$ -Matrix, die in der Form $A(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_{k-1} x^{k-1}$ darstellbar ist.
 - $b(x)$ ist ein n -Vektor, der in der Form $b(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}$ darstellbar ist.
 - $A(x)$ ist invertierbar.

Zusammenfassung (Matrix-Exponentiallösung)

Die Lösung $y(x) = e^{A(x)x} y_0 + \int_0^x e^{A(x)s} b(s) ds$ ist die Lösung des DGL-Systems $y' = A(x)y + b(x)$.

Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

Definition: Ein inhomogenes DGL-System 1. Ordnung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

heißt **inhomogen**, falls $b(x) \neq 0$ ist. Sonst heißt es **homogen**.

Wichtig: Die Lösungsmenge einer homogenen DGL n-ter Ordnung ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist ein $(n-1)$ -dimensionaler Affinraum.

Struktur: Die Lösungsmenge einer inhomogenen DGL n-ter Ordnung ist die Summe einer Partikulärlösung und der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL.