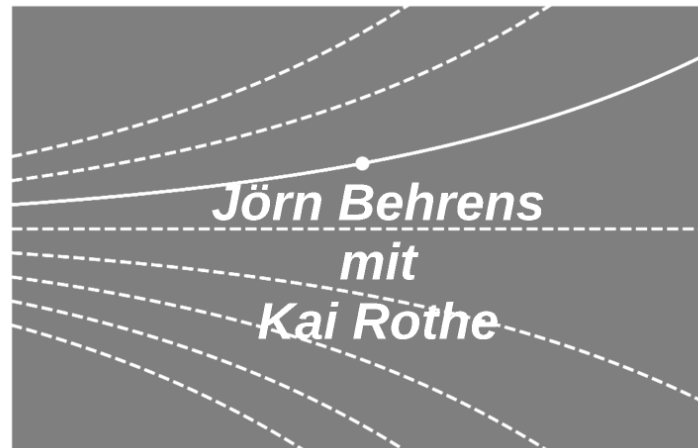


Differentialgleichungen I



Trennung der Variablen
Variation der Konstanten

Buch Kapitel 6.4-6.5

Erinnerung

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung):
Eine gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung (DGL n -ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n -ter Ordnung:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{implizite Form})$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{explizite Form}).$$

Bezeichne eine Funktion y , welche die DGL erfüllt als **Lösung** oder **Integral** der DGL.

2

Definition (Anfangs- und Randwerte):
Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen **Anfangsbedingungen**, andernfalls **Randbedingungen**.

Ein **Anfangswertproblem** ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.
Entsprechend ist ein **Randwertproblem** gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

DGL 1. Ordnung:

- Sei die DGL 1. Ordnung in expliziter Form gegeben: $y' = f(x, y)$.
- Die Paare $x, y \in D_f$ liegen im **Definitionsbereich** von f .

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung):

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung** (DGL n -ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n -ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{implizite Form})$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{explizite Form}).$$

Bezeichne eine Funktion y , welche die DGL erfüllt als **Lösung** oder **Integral** der DGL.

2

Defin
Bedir
Varia

Ein **A**
geget
Entsp
erten

bis

an

GL.

Definition (Anfangs- und Randwerte):

Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen **Anfangsbedingungen**, andernfalls **Randbedingungen**.

Ein **Anfangswertproblem** ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.

Entsprechend ist ein **Randwertproblem** gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

DGL 1. Ordnung:

- Sei die **DGL 1. Ordnung** in expliziter Form gegeben: $y' = f(x, y)$.
- Die Paare $x, y \in D_f$ liegen im **Definitionsbereich** von f

DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Idee:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

so heißt die **Differentialgleichung mit trennbaren Variablen**.
Seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_y$ stetig und $h(y) \neq 0$.

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.

• Seien $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, und $H(y) = \int_b^y h(t) dt$
Stammfunktionen zu g und h , sowie H^{-1} Umkehrfunktion von H (d.h. $H^{-1}(H(y)) = y$).

- Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ so ergibt Integration die Lösung der DGL:
 $H(y(x)) = G(x) + C$

- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt

$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}(G(x) + C). \quad \mathbf{1}$$

Lösungsschema:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_y$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x .
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.

4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

Beispiel:

Differential:

$$y' = \sin x \cos y$$

- Beachte: $\cos y \neq 0$ oder $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Schreibe $\frac{y'}{\cos y} = \sin x$ bzw. $\int \frac{dy'}{\cos y} = \int \sin x dx$.

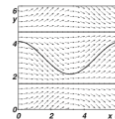
- Integriere: $\ln|\tan(\frac{y}{2})| + C_1 = -\cos x + C_2$.

- Auflösung nach y :

$$y(x) = 2 \arctan(e^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

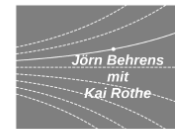
- Konstante Lösungen: $y(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k$

- Erinnerung: Richtfeld!



2

Differentialgleichung



Trennung der Variablen
Variation der Konstante
Buch Kapitel: 6.4-6.5

Erinnerung

Definition: (Gewöhnliche Differentialgleichung)
Eine gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung (DGL n -ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis zur n -ten Ordnung:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{implizite Form})$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:
 $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (explizite Form).

Bezeichnet eine Funktion y , welche die DGL erfüllt, als Lösung oder Integral der DGL.

Definieren

Idee:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

so heist sie **Differentialgleichung mit trennbaren Variablen**.

Seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig und $h(y) \neq 0$.

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.

- Seien

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt, \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(t) dt$$

Stammfunktionen zu g und h , sowie H^{-1} Umkehrfunktion von H (d.h. $H^{-1}(H(y)) = y$).

- Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ so ergibt Integration die Lösung der DGL:

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt

$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}[G(x) + C].$$

1

Lösun
Sei ein

und se

1. S

2. I

3. I

4. I

Lösungsschema:

Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x .
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.

4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

(d.h.

isung

1

Beispiel:
Betrachte

$$y' = \sin x \cos y.$$

- Beachte: $\cos y \neq 0$ oder $y \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Erhalte:

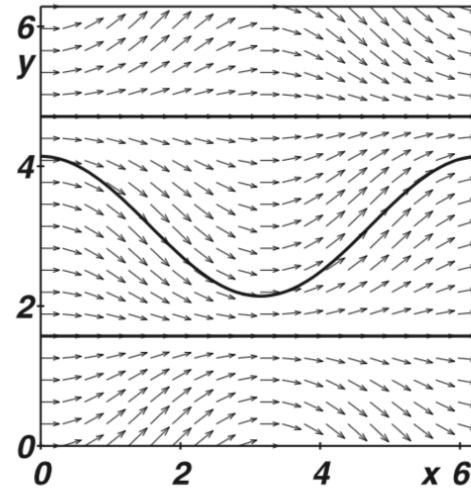
$$\frac{y'}{\cos y} = \sin x \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{\cos y} = \int \sin x \, dx.$$

- Integration: $\ln |\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})| = -\cos x + C_0$.

- Auflösung nach y :

$$y(x) = 2 \arctan(Ce^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} \quad C \in \mathbb{R}$$

- Konstante Lösungen: $y(x) \equiv (k + \frac{1}{2})\pi$
- Erinnerung: Richtungsfeld!



2

Lineare DGL 1. Ordnung

Definition: (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)
Betrachte

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Seien die Koeffizienten $a(x), b(x), c(x)$ stetig (aber nicht notwendig linear) auf einem Intervall I und $a(x) \neq 0$. Diese DGL heißt **lineare DGL 1. Ordnung**, wenn sie linear bezüglich der Lösung $y(x)$ ist, d.h. eine Linearkombination

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

zweier Lösungen ist wiederum Lösung der DGL.

Lösungsidee 1:

Die homogene lineare DGL $y' + p(x)y = 0$ ist ein Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen!

Für $y > 0$ und $y < 0$ schreibe

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = - \int p(x) dx + C_0$$

mit $|y| = e^{C_0} e^{-P(x)}$ bzw. $y = C e^{-P(x)}$ ($C \in \mathbb{R}, C \neq 0$).
Dabei ist $P(x)$ Stammfunktion von $p(x)$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)

Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variere C , d.h. betrachte $C = C(x)$.

• Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)},$$

• Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

• Umformen und Integrieren:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) &\Rightarrow C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ \Rightarrow C(x) &= \int q(x)e^{P(x)} dx + C_1, \quad C_1 = \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

• Verwendung des Ansatzes:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)} \left(C_1 + \int q(t)e^{P(t)} dt \right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int q(t)e^{P(t)} dt \\ &= \text{Hom}(x) + \text{Part}(x). \end{aligned}$$

Beobachtungen

• Differentialform beweis:

$$\text{Hom}(x) = e^{-P(x)} \int q(t)e^{P(t)} dt$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

• Da

$$\text{Hom}(x) = C_1 e^{-P(x)}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist. Mit $y(x) = \text{Hom}(x) + \text{Part}(x)$ für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ Lösung der inhomogenen DGL.

• Außerdem ist jede beliebige Lösung $\tilde{y}(x)$ der inhomogenen DGL von der Form oben.

Lösungen I



ablen
tanten

3.5

ung

Definition: (Anfangs- und Randwert)
Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen **Anfangsbedingungen**, andernfalls **Randbedingungen**.

Definition: (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)

Betrachte

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Seien die Koeffizienten $(a(x), b(x), c(x))$ stetig (aber nicht notwendig linear) auf einem Intervall I und $a(x) \neq 0$. Diese DGL heißt **lineare DGL 1. Ordnung**, wenn sie linear bezüglich der Lösung $y(x)$ ist, d.h. eine Linearkombination

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

zweier Lösungen ist wiederum Lösung der DGL.

Bemerkungen:

- Unter der Voraussetzung $a(x) \neq 0$ ($x \in I$), ergibt sich

$$y' + p(x)y = q(x)$$

mit $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ jeweils stetig.

- Existenz und Eindeutigkeit sind immer erfüllt (keine singulären Lösungen) sofern in I $p(x)$ und $q(x)$ stetig sind..
- Falls $q(x) = 0$ heißt die DGL **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Lösungssic

Die homo
trenntbarer

Für $y > 0$

mit $|y| =$,
Dabei ist .

r) auf
wenn

Lösungsidee 1:

Die homogene lineare DGL $y' + p(x)y = 0$ ist ein Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen!

Für $y > 0$ und $y < 0$ schreibe

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = - \int p(x) dx + C_0$$

mit $|y| = e^{C_0} e^{-P(x)}$ bzw. $y = C e^{-P(x)}$ ($C \in \mathbb{R}, C \neq 0$).

Dabei ist $P(x)$ Stammfunktion von $p(x)$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)

Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variiere C , d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$

- Einsetzen:

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

- Umformen und Integrieren:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) &\Rightarrow C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt + C_1 \quad C_1 \equiv \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verwendung des Ansatzes:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)} \left(C_1 + \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \\ &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{inh}}(x). \end{aligned}$$

Beobachtungen:

- Differentiation beweist:

$$y_{\text{inh}}(x) = e^{-P(x)} \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

- Da

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^{-P(x)}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist, ist $y(x) = y_{\text{hom}} + y_{\text{inh}}(x)$ für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ Lösung der inhomogenen DGL.

- Andererseits ist jede beliebige Lösung $\tilde{y}(x)$ der inhomogenen DLG von der Form oben.

3

Beispiel: (Bernoullische Differentialgleichung)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

4

DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Die DGL gegeben in der Form $y' = \frac{f(y)}{g(x)}$

• Trenne die Differentialgleichung mit trennbaren Variablen:
 Multipliziere mit $g(x)$ und teile mit $f(y)$.
 • Du erzielst nach Kreuzmultiplizieren eine Lösung:
 • Integriere $\int \frac{1}{f(y)} dy = \int \frac{1}{g(x)} dx + C$
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$.
 • Bestimme die Nullstellen von $g(x)$.
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$ und $g(x)$.
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$ und $g(x)$.

Übersichtsskizze
 Sei eine DGL gegeben in der Form $y' = \frac{f(y)}{g(x)}$
 und seien $f(y)$ und $g(x)$ für $(x, y) \in D$ stetig, $f(y) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ in D .

- Schreibe die DGL in der Form $f(y)y' = g(x)$ bzw. $f(y)dy = g(x)dx$.
- Integriere beide Seiten nach y und rechte Seite nach x .
- Falls möglich, löse analytisch nach y auf.
 $F(y) = G(x) + C$
- Falls nicht möglich, lege die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.
 Für $C = C_0 = F(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung der AWP $y(x_0) = y_0$.



Differentialgleichungen I



Erinnerung

Die DGL $y' = f(x, y)$ heißt separabel, wenn $f(x, y) = g(x)h(y)$ gilt.
 Dann kann man die DGL in der Form $f(y)y' = g(x)$ schreiben und durch Integration lösen.
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$ und $g(x)$.
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$ und $g(x)$.

Die DGL $y' = f(x, y)$ heißt separabel, wenn $f(x, y) = g(x)h(y)$ gilt.
 Dann kann man die DGL in der Form $f(y)y' = g(x)$ schreiben und durch Integration lösen.
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$ und $g(x)$.
 • Bestimme die Nullstellen von $f(y)$ und $g(x)$.

Lineare DGL 1. Ordnung

Definition: (Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung)
 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt die DGL $y' + a(x)y = b(x)$ eine lineare DGL 1. Ordnung.

Beispiel: (Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung)
 $y' + 2xy = x^2$

Beispiel: (Bernoulli-Differentialgleichung)
 $y' + 2xy = x^2y^2$

• Lösung:
 $y' + 2xy = x^2y^2$
 $y^{-2}y' + 2xy^{-1} = x^2$
 $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$
 $-z' + 2xz = x^2$
 $z' - 2xz = -x^2$
 Integrationsfaktorsuche:
 $\mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$
 $(ze^{-x^2})' = -x^2e^{-x^2}$
 $ze^{-x^2} = \int -x^2e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
 $z = \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
 $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{2} + Ce^{x^2}}$

Beispiel: (Bernoulli-Differentialgleichung)
 $y' + 2xy = x^2y^2$

• Lösung:
 $y' + 2xy = x^2y^2$
 $y^{-2}y' + 2xy^{-1} = x^2$
 $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$
 $-z' + 2xz = x^2$
 $z' - 2xz = -x^2$
 Integrationsfaktorsuche:
 $\mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$
 $(ze^{-x^2})' = -x^2e^{-x^2}$
 $ze^{-x^2} = \int -x^2e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
 $z = \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
 $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{2} + Ce^{x^2}}$