Aufgabe 1: (3+2 Punkte)

a) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' - y = 2 \quad \text{mit} \quad y\,(0) = 3.$$

b) Man berechne die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0\,.$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) (3 Punkte)

Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$y' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = ce^x.$$

Der Ansatz $y_p(x) = a$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt

$$0 - a = 2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = -2.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichnung mit $c \in \mathbb{R}$ lautet

$$y(x) = ce^x - 2.$$

Die Auswertung der Anfangsbedingung $3 = y(0) = ce^0 - 2 \;\Rightarrow\; c = 5$

ergibt die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x) = 5e^x - 2.$

b) (2 Punkte)

Setzt man den Lösungsansatz $y(x) = x^\alpha$ in die Eulersche Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$0 = (\alpha(\alpha-1)+\alpha-4)x^\alpha = (\alpha^2-4)x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2.$$

Ein Fundamentalsystem bilden also $y_1(x) = x^2,\; y_2(x) = \dfrac{1}{x^2}\,.$

Damit ergibt sich mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}\,.$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Man berechne die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gilt $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

Lösung:

(5 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^2$ zu $\lambda_2 = 3$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ansatz spezielle inhomogene Lösung: $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{a}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_p - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_p(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine inhomogene Lösung lautet mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1 \boldsymbol{y}^1(x) + c_2 \boldsymbol{y}^2(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' + 2y' - 3y = 7 - 6x\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 3\,.$$

Hinweis: Es gilt $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$.

Lösung:

(4 Punkte)

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 2y' - 3y = 0$:

charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -3$$

allgemeine homogene Lösung: $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ansatz für eine spezielle inhomogene Lösung $y_p(x) = ax + b$,

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$(ax+b)'' + 2(ax+b)' - 3(ax+b) = -3ax + 2a - 3b = 7 - 6x \;\Rightarrow\; a = 2 \;\Rightarrow\; b = -1\,.$$

allgemeine inhomogene Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = c_1 e^x - 3c_2 e^{-3x} + 2$$

Anfangswerte:

$0 = y(0) = c_1 + c_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1 - c_2$

$3 = y'(0) = c_1 - 3c_2 + 2 = 1 - c_2 - 3c_2 + 2 = 3 - 4c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 1$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = e^x + 2x - 1$

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Für die lineare Differentialgleichung

$$y'' + 9y = 0$$

berechne man die allgemeine reelle Lösung und berechne damit alle Lösungen der zugehörigen Randwertaufgabe mit den Randwerten $y'(0) = 6$ und $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$.

Lösung:

(3 Punkte)

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

komplexes Fundamentalsystem

$$e^{3ix} = \cos(3x) + i\sin(3x)\,, \quad e^{-3ix} = \cos(3x) - i\sin(3x)\,.$$

Obiger Real- und Imaginärteil führen auf die allgemeine reelle Lösung

$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y'(x) = -3c_1\sin(3x) + 3c_2\cos(3x)$.

Aus den Randbedingungen erhält man:

$6 = y'(0) = -3c_1\sin(0) + 3c_2\cos(0) = 3c_2 \quad \Rightarrow c_2 = 2,$

$2 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2.$

Lösungen der Randwertaufgabe: $y(x) = c_1\cos(3x) + 2\sin(3x)$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Man berechne für das nichtlineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 4 \\ \dot{y} &= 4y(x-1) \end{aligned}$$

alle stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten.

Lösung:

(3 Punkte)

Bedingung für Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-4 \\ 4y(x-1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(x,y) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4y & 4(x-1) \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P})$ führen auf das Stabilitätsverhalten.

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(1,4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -4 < 0 < \lambda_2 = 4$$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ein (lokal) instabiler (Sattel-) Punkt.