

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \mathbf{y} .$$

a) Man beweise durch Induktion für $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{A}^k = 5^{k-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-5)^{k-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} .$$

b) Man berechne die Matrix-Exponentiallösung $e^{x\mathbf{A}}$ des Systems.

c) Man berechne das Fundamentalsystem über Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{A} und vergleiche das Ergebnis mit dem aus b).

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = -18 .$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax + b$.

b) Man schreibe die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung und berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.