

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen

Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Aufgabe 1: Gegeben sei das lineare System

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2\alpha \\ 0 & -1 + \alpha & 0 \\ -2\alpha & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t).$$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0, 0, 0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha-\lambda & 0 \\ -2\alpha & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda + \alpha - 1) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2\alpha \\ -2\alpha & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda + \alpha - 1) \left((-2-\lambda)^2 - 4\alpha^2 \right) = 0$$

$$\lambda_1 = \alpha - 1$$

$$(-2-\lambda)^2 = 4\alpha^2 \implies -2-\lambda = \pm 2\alpha \implies \lambda_{2,3} = -2 \pm 2\alpha$$

instabil: $\lambda_1 > 0 \iff \alpha > 1$

oder $\lambda_2 = -2 + 2\alpha > 0 \iff \alpha > 1$

oder $\lambda_3 = -2 - 2\alpha > 0 \iff -2 > 2\alpha \iff \alpha < -1$

instabil für

$$\lambda \notin [-1, 1]$$

strikt stabil wenn $\lambda_1 < 0 \iff \alpha < 1$

und $\lambda_2 = 2(\alpha - 1) < 0 \iff \alpha < 1$

und $\lambda_3 = -2 - 2\alpha < 0 \iff -2 < 2\alpha \iff \alpha > -1$

strikt stabil

$$\alpha \in (-1, 1)$$

$$\alpha = -1 :$$

$$\lambda_1 = \alpha - 1 = -2, \quad \lambda_2 = -2 + 2\alpha = -2 - 2 = -4$$

$$\lambda_3 = -2 - 2\alpha = -2 + 2 = 0 \quad \text{einfacher Eigenwert}$$

\implies gleichmäßig stabil

$$\alpha = 1$$

$$\lambda_1 = \alpha - 1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2 + 2\alpha = 0$$

$$\lambda_3 = -2 - 2\alpha = -4$$

$$a(0) = 2$$

$$g(0) = ?$$

Eigenraum für
 $\alpha = 1, \lambda = 0$

$$(A - 0I) \vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{III} - \text{I} : -2v_2 = 0 \implies v_2 = 0$$

$$\text{I} : -2v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \implies v_3 = -v_1$$

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

einzigste EV-Richtung

$$\implies g(0) = 1 < 2 = a(0)$$

\implies Ruhelage instabil!

Aufgabe 2: ~~Aufgabe 2~~ Gegeben ist das System

$$x' = x(x - 1 - y) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} f(x,y)$$

$$y' = y(2x - 3 - y)$$

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

$$\begin{array}{l} x' = 0 \\ y' = 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} x(x-1-y) = 0 \iff x=0 \vee x-1-y=0 \\ y(2x-3-y) = 0 \iff y=0 \vee 2x-3-y=0 \end{array}$$

oder $x=0$ und $y=0 \implies P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder $x=0$ // $2x-3-y=0 \implies P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

oder $x-1-y=0 \iff y=x-1$ und $y=0 \implies P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder $x-1-y=0 \iff y=x-1$ // $2x-3-y=0 \implies 2x-3-x+1=0$

$$\iff x=2$$

$$y=1 \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - x - xy \\ 2xy - 3y - y^2 \end{pmatrix} \rightarrow Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1-y & -x \\ 2y & 2x-3-2y \end{pmatrix}$$

$$Jf \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1 < 0 \quad \lambda_2 = -3 < 0$$

$\implies P_1$ strikt stabil

$$Jf \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 2 > 0 \implies P_2 \text{ instabil}$$

$$Jf \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0 \Rightarrow P_3 \text{ instabil}$$

$$Jf \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \left(Jf \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda I \right) = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 4 \\ = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} = 0$$

$$\lambda = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Re}(\lambda)} \pm \underbrace{\sqrt{-\frac{7}{4}}}_{\text{imaginär}}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix} \implies P_4 \text{ instabil}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_1^2 y_2 + y_2^3 - 2y_1 y_2^2 \\ y_2' &= -y_1^3 - y_1 y_2^2 \end{aligned} \right\} f(y_1, y_2)$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*) = (0, 0)$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2.$$

$$Jf(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1 y_2 - 2y_2^2 & y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_1 y_2 \\ -3y_1^2 - y_2^2 & -2y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

$$Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

\Rightarrow keine Aussage mit Hilfe der Linearisierung möglich \rightarrow suche Lyapunov-Fkt

I) $V(0, 0) = 0$

II) $V(y_1, y_2) > 0 \quad \vec{y} \neq \vec{0} \text{ (nahe } \vec{0})$

III) $\langle \nabla V, f \rangle$ festes Vorzeichen

< 0 strikt stabil
 ≤ 0 stabil \leftarrow
 > 0 instabil

$$I) V(y_1, y_2) = \underline{a_1 y_1^2 + b y_2^2} \implies V(0, 0) = 0$$

$$II) V(y_1, y_2) > 0 \quad \text{falls } \boxed{a, b > 0} \quad \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$III) \langle \nabla V, f \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2a y_1 \\ 2b y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 y_2 + y_2^3 - 2y_1 y_2^2 \\ -y_1^3 - y_1 y_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \underline{2a y_1^3 y_2} + \underline{2a y_1 y_2^3} - 4a y_1^2 y_2^2 - \underline{2b y_2 y_1^3} - \underline{2b y_1 y_2^3}$$

$$= \underbrace{y_1^3 y_2 (2a - 2b)}_{=0} + \underbrace{y_1 y_2^3 (2a - 2b)}_{=0} - \underbrace{4a y_1^2 y_2^2}_{\leq 0}$$

Wähle $a = b > 0$

$$= 0 + 0 - 4a y_1^2 y_2^2 \leq 0$$

für $\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $y_2 \neq 0$
 $\langle \nabla V, f \rangle = 0$

\implies Ljapunov-Fkt gefunden
 \implies Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist stabil