Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Aufgabe 1: Gegeben sei das lineare System

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha & 0 \\ -2\alpha & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t)\,.$$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2\alpha \\ 0 & -1+\alpha-\lambda & 0 \\ -2\alpha & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda+\alpha-1)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2\alpha \\ -2\alpha & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \alpha - 1}$$

$$= (-\lambda+\alpha-1)\left((-2-\lambda)^2 - 4\alpha^2\right) = 0$$

$$(-2-\lambda)^2 = 4\alpha^2 \implies -2-\lambda = \pm 2\alpha \implies \boxed{\lambda_{2,3} = -2 \pm 2\alpha}$$

instabil: $\lambda_1 > 0 \iff \alpha > 1$

oder $\lambda = -2+2\alpha > 0 \iff \alpha > 1$

oder $\lambda_3 = -2-2\alpha > 0 \iff -2 > 2\alpha \iff \alpha < -1$

instabil für $\lambda \notin [-1,1]$

strikt stabil wenn $\lambda_1 < 0 \iff \alpha < 1$

und $\lambda_2 = 2(\alpha-1) < 0 \iff \alpha < 1$

und $\lambda_3 = -2-2\alpha < 0 \iff -2 < 2\alpha \iff \alpha > -1$

strikt stabil $\alpha \in (-1,1)$

$\alpha = -1$: $\lambda_1 = \alpha - 1 = -2$, $\lambda_2 = -2+2\alpha = -2-2 = -4$

$\underline{\lambda_3 = -2-2\alpha = -2+2 = 0}$ einfacher Eigenwert

$\Longrightarrow$ gleichmäßig stabil

$\alpha = 1$ $\underbrace{\lambda_1 = \alpha - 1 = 0 \qquad \lambda_2 = -2+2\alpha = 0}$ $\lambda_3 = -2-2\alpha = -4$

$\alpha(0) = 2 \qquad g(0) = ?$

Eigenraum für $\alpha = 1$, $\lambda = 0$

$(A - 0I)\vec{v} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

III − I : $-2v_2 = 0 \Longrightarrow v_2 = 0$

I : $-2v_1 + \cancel{v_2} - 2v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = -v_1$

$v^{[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ einzige EV-Richtung

$\Longrightarrow g(0) = 1 < 2 = a(0)$

$\Longrightarrow$ Ruhelage instabil !

Aufgabe 2: Gegeben ist das System

$$\left.\begin{aligned} x' &= \underline{x\,(x - 1 - y)} \\ y' &= \underline{y\,(2x - 3 - y)} \end{aligned}\right\} f(x,y)$$

Bestimmen Sie alle $\underbrace{\text{Gleichgewichtspunkte}}_{\substack{x'=0 \\ y'=0}}$ ✓ des Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

$x\,(x-1-y) = 0 \iff x = 0 \;\vee\; x-1-y=0$

und

$y\,(2x-3-y) = 0 \iff y = 0 \;\vee\; 2x-3-y=0$

$x = 0$ und $y = 0 \Longrightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder

$x = 0$ 〃 $2x-3-y=0 \Longrightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

oder

$x-1-y=0 \iff y = x-1$ und $y = 0 \Longrightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder

$x-1-y=0 \iff \underline{y = x-1}$ 〃 $2x-3-y=0 \Longrightarrow 2x-3-x+1=0$

$\iff x = 2$

$y = 1$ $\qquad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - x - xy \\ 2xy - 3y - y^2 \end{pmatrix} \to Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1-y & -x \\ 2y & 2x-3-2y \end{pmatrix}$$

$$Jf\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -1 < 0 \qquad \lambda_2 = -3 < 0$$

$\Longrightarrow P_1$ strikt stabil

$$Jf\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 2 > 0 \Longrightarrow P_2 \text{ instabil}$$

$$Jf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -1\end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 1 > 0 \Longrightarrow P_3 \text{ instabil}$$

$$Jf\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-\lambda & -2\\2 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\left(Jf\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \lambda I\right) = (2-\lambda)(-1-\lambda)+4$$

$$= \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = -2 + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} = 0$$

$$\lambda = \underbrace{\frac{1}{2}}_{Re(\lambda) > 0} \pm \underbrace{\sqrt{-\frac{7}{4}}}_{\text{imaginär}}$$

$$\Longrightarrow P_4 \text{ instabil}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1^2\,y_2 + y_2^3 - 2y_1\,y_2^2 \\ y_2' &= -\,y_1^3 - y_1\,y_2^2\,. \end{aligned}\right\}\ f(y_1, y_2)$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*,\, y_2^*) = (0,0)$ des Systems auf Stabilität. Verwenden Sie gegebenenfalls eine Funktion der Form

$$V(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2\,.$$

$$Jf(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1y_2 - 2y_2^2 & y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_1y_2 \\ -3y_1^2 - y_2^2 & -2y_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow$ keine Aussage mit Hilfe der Linearisierung möglich $\rightarrow$ suche Ljapunov Fkt

I) $V(0,0) = 0$

II) $V(y_1, y_2) > 0$ $\quad \vec{y} \neq \vec{0}$ (nahe $\vec{0}$)

III) $\langle \nabla V, f \rangle$ festes Vorzeichen

< 0 strikt stabil

≤ 0 stabil $\leftarrow$

> 0 instabil

I) $V(y_1, y_2) = a y_1^2 + b y_2^2 \Longrightarrow V(0,0) = 0$

II) $V(y_1, y_2) > 0$ falls $\boxed{a, b > 0}$ $\quad \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

III) $$\langle \nabla V, f \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2a y_1 \\ 2b y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 y_2 + y_2^3 - 2 y_1 y_2^2 \\ -y_1^3 - y_1 y_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 2a y_1^3 y_2 + 2a y_1 y_2^3 - 4a y_1^2 y_2^2 - 2b y_2 y_1^3 - 2b y_1 y_2^3$$

$$= y_1^3 y_2 \underbrace{(2a - 2b)}_{\overset{!}{=} 0} + y_1 y_2^3 \underbrace{(2a - 2b)}_{\overset{!}{=} 0} \underbrace{- 4a \underbrace{y_1^2 y_2^2}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

Wähle $a = b > 0$

$$= 0 + 0 - 4a y_1^2 y_2^2 \leq 0$$

für $\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $y_2 \neq 0$

$\langle \nabla V, f \rangle = 0$

$\Longrightarrow$ Ljapunov-Fkt gefunden

$\Longrightarrow$ Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist stabil