Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Aufgabe1:

a) $y''(t) = y'(t)\,(y(t)+1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2\cdot$

$y'' = y'(y+1) = \underline{f(y, y')}$ $\quad V := y' \quad \frac{dv}{dy} = \frac{f(y,v)}{v}$

$\frac{dv}{dy} = \frac{v(y+1)}{v} = (y+1)\cdot 1 \quad V = V(y)$

$\int dv = \int (y+1)\,dy \implies V = \frac{y^2}{2} + y + k$

Für $t=0$ gilt $\underline{y=1}$ und $y' = v = 2$

$V(1) = 2$

$v(1) = \frac{1}{2} + 1 + k \overset{!}{=} 2$

$\implies k = \frac{1}{2}$

$V = \frac{y^2}{2} + y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y^2 + 2y + 1) = \boxed{\frac{1}{2}(y+1)^2 = V}$

$V = \frac{dy}{dt} \quad \int \frac{dt}{\cancel{dy}}\cancel{dy} = \int \frac{1}{V}\,dy = \int \frac{2}{(y+1)^2}\,dy \implies \int dt = 2\int \frac{1}{(y+2)^2}\,dy$

$z = y+2$

$dz = dz$

$\int \frac{1}{z^2}\,dz = \frac{-1}{z} + \hat{c}$

$= -\frac{1}{y+2} + \hat{c}$

$t = \frac{-2}{(y+1)} + C \implies t - C = \frac{-2}{y+1} \iff \frac{-2}{t-c} = y+1$

$\boxed{y(t) = \frac{2}{c-t} - 1}$ $\quad y(0) = \frac{2}{c-0} - 1 \overset{!}{=} 1 \implies \boxed{c=1}$ $\quad \boxed{y(t) = \frac{2}{1-t} - 1}$

b) Radialsymmetrische Lösungen $u = u(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ von $\Delta u = 1$

Vorlesung Analysis III/ HÜ DGL: In Polarkoordinaten $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

Lösc $\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u(r) + 0 = 1$ $\qquad u = u(r)$, $u_r(r) = u'(r)$

$u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) = 1$ $\qquad z(r) := u'(r) \Rightarrow z'(r) = u''(r)$

$\longrightarrow$ $z'(r) + \frac{1}{r} z(r) = 1$ $\qquad$ Lineare Dgl $\qquad r \neq 0$

$z_h'(r) = -\frac{1}{r} z_h(r) \Longrightarrow \frac{d z_h}{dr} = -\frac{1}{r} z_h \Longrightarrow \int \frac{d z_h}{z_h} = -\int \frac{1}{r} dr \Rightarrow \ln(|z_h|) = -\ln(r) + d$

$\xrightarrow{\exp}$ $\boxed{z_h = \frac{c}{r}}$ $\qquad (*)\ z_p' + \frac{1}{r} z_p = 1$ $\qquad$ Ansatz $z_p(r) = c(r) \cdot \frac{1}{r}$

$\xrightarrow[(*)]{\text{Dgl}}$ $c'(r)\frac{1}{r} = 1 \Longrightarrow c'(r) = r \Longrightarrow c(r) = \frac{r^2}{2} + \tilde{k}$

z.B. $z_p(r) = c(r) \cdot \frac{1}{r} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} = \boxed{\frac{r}{2} = z_p}$

$z(r) = z_h + z_p = \frac{c}{r} + \frac{r}{2} = u'(r)$

$\longrightarrow$ $\boxed{u(r) = c \cdot \ln(r) + \frac{r^2}{4} + k}$

$u(x,y) = c \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2+y^2}{4} + k$

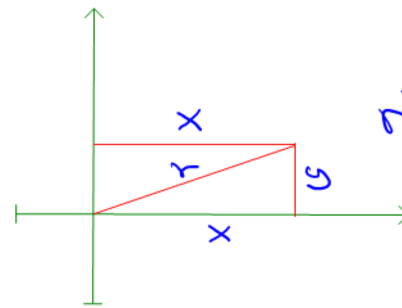
c) Stationäre, radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer homogenen Kreisscheibe $\Delta T(x,y) = 0$

mit
$T(x,y) = 20$ für $\sqrt{x^2+y^2} = 1$ und $T(x,y) = 15$ für $\sqrt{x^2+y^2} = 2$.

$$T_{rr} + \frac{1}{r} T_r = 0 \qquad z = T_r \qquad z' = T_{rr}$$

$$z'(r) + \frac{1}{r} z_r = 0 \qquad \text{wie } z_h \text{ oben} \implies z(r) = \frac{c}{r} = T'(r)$$

$$\boxed{T(r) = c \ln(r) + d}$$



$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} T = 20 & \text{für } r = 1 \\ T = 15 & \text{für } r = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(1) = c \underbrace{\ln(1)}_{0} + d = \boxed{d \overset{!}{=} 20} \\ T(2) = c \ln(2) + 20 \overset{!}{=} 15 \end{cases} \implies c \ln(2) = -5$$

$$c = -5/\ln(2)$$

$$T(r) = -5 \frac{\ln(r)}{\ln(2)} + 20$$

$$T(x,y) = -5 \frac{\ln(\sqrt{x^2+y^2})}{\ln(2)} + 20$$

Aufgabe 2:

a) Gesucht Lösung der Anfangswertaufgabe $y' + \overset{a}{3}y + y^{\overset{\alpha}{\frac{3}{4}}} = 0, \qquad y(0) = 1$

Bernoullische Dgl $\alpha = 3/4 \quad a = 3 \quad b = -1$

Tabelle aus Hü 2 : Substitution $u = y^{1-\alpha} = y^{1/4} \xrightarrow{\text{Dgl}}$

$u' + (1-\alpha)\,a\,u = (1-\alpha)\,b \;:\quad u' + \frac{1}{4}\cdot 3\,u = \frac{1}{4}(-1)$

Linear

$u_h' + \frac{3}{4}u_h = 0 \qquad \frac{du_h}{dt} = -\frac{3}{4}u_h$

$\Longrightarrow \int \frac{du_h}{u_h} = -\int \frac{3}{4}\,dt \Longrightarrow \ln(|u_h|) = -\frac{3}{4}t + \hat{c} \overset{\exp}{\Longrightarrow} |u_h| = e^{-\frac{3}{4}t}\cdot e^{\hat{c}} = \tilde{c}\,e^{-\frac{3}{4}t}$

$\Longrightarrow \boxed{u_h = c\,e^{-\frac{3}{4}t}}$

u_p für $u' + \frac{3}{4}u = -\frac{1}{4}$ Koeff'n konst, rechte Seite = Polynom nullten Grades

$\longrightarrow u_p(t) = $ Polynom nullten Grades $= k$

$\xrightarrow[u_p = k]{\text{Dgl}} \underbrace{(k)'}_{0} + \frac{3}{4}k = -\frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{k = -\frac{1}{3} = u_p}$

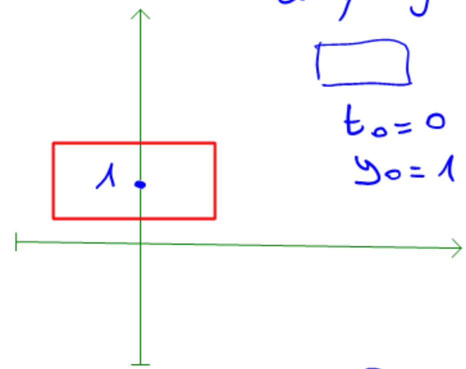
$y^{1/4} = u = u_h + u_p = c\,e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \Longrightarrow y = u^4 = \left(c\,e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3}\right)^4$

$y(0) \overset{!}{=} 1 \qquad \underbrace{y(0) = \left(c\underset{1}{\underset{\shortparallel}{e^0}} - \frac{1}{3}\right)^4}_{\overset{!}{=}1} \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \boxed{c = \frac{4}{3}} \qquad y(t) = \left(\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3}\right)^4$

b) Zeigen Sie, dass die Lösung im Intervall $\left[0, \frac{4}{3}\ln(4)\right]$ eindeutig ist.

$y' = f(t,y)$ $\qquad$ $y' = \underline{-3y - y^{3/4}} = f(t,y)$ stetig also beschränkt auf jedem $\square$ um $t_0 = 0$, $y_0 = 1$

$$f_y(t,y) = -3 - \frac{3}{4} y^{-1/4} = -3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$$



beschränkt auf Rechtecke solange $y > 0$ bleibt

$y = 0 \longrightarrow f_y \longrightarrow \infty$ ↯

Für welche t gilt $y(t) = \left(\underbrace{\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3}}_{0}\right)^4 = 0 \iff \frac{4}{\cancel{3}} e^{-\frac{3}{4}t} = \frac{1}{\cancel{3}}$

$$\iff e^{-\frac{3}{4}t} = \frac{1}{4} \overset{\ln}{\iff} -\frac{3}{4}t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \implies t = -\frac{4}{3}\underbrace{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}_{-\ln(4)}$$

$$\iff \boxed{t^* = \frac{4}{3}\ln(4)}$$

$\forall\, 0 \leq t < t^*$ gilt f stetig in Quader um (t_0, y_0)

f_y ist beschränkt $\implies f$ lip.stetig bzgl. y

$\Longrightarrow$ Lösung eindutig

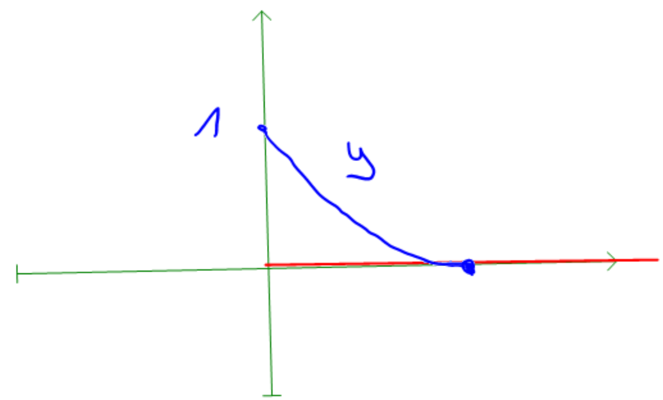
c) Geben Sie eine zweite Lösung auf einem Intervall $[0, L]$ mit $L > \frac{4}{3}\ln(4)$ an.

(*) $y' + 3y + y^{\frac{3}{4}} = 0$

$\hat{y} \equiv 0$ ist Lsg der Dgl

Aber nicht Lösung der AWA

Dgl (*) + $y(0) = 1$



$$z(t) = \begin{cases} y(t) & t \leq t^* \\ 0 & t > t^* \end{cases}$$ stetig

$$y'(t) = \left(\left(\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3}\right)^4\right)' = 4\left(\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3}\right)'$$

$$y'(t^*) = \left(\underbrace{\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}t^*} - \frac{1}{3}}_{0}\right)^3 \cdot 4\left(\quad\right)' = 0$$

$$z'(t) = \begin{cases} y'(t) & t < t^* \\ 0 & t > t^* \end{cases}$$ $y'(t^*) = 0$

$\Longrightarrow$ z' stetig