

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen

Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Aufgabe1:

a) $y''(t) = y'(t)(y(t) + 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

$$y'' = y'(y+1) = \underline{f(y, y')} \quad v := y' \quad \frac{dv}{dy} = \frac{f(y, v)}{v}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v(y+1)}{v} = (y+1) \cdot 1 \quad v = v(y)$$

$$\int dv = \int (y+1) dy \implies v = \frac{y^2}{2} + y + k$$

$$v(1) = \frac{1}{2} + 1 + k \stackrel{!}{=} 2$$

$$\implies k = \frac{1}{2}$$

$$v = \frac{y^2}{2} + y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (y^2 + 2y + 1) = \frac{1}{2} (y+1)^2 = v$$

Für $t=0$ gilt
 $\underline{y=1}$ und $y'=v=2$
 $v(1) = 2$

$$v = \frac{dy}{dt} \quad \int \frac{dt}{dy} dy = \int \frac{1}{v} dy = \int \frac{2}{(y+1)^2} dy \implies \int dt = 2 \int \frac{1}{(y+1)^2} dy$$

$$t = \frac{-2}{y+1} + C \implies t - C = \frac{-2}{y+1} \Leftrightarrow \frac{-2}{t-C} = y+1$$

$$z = y+2$$

$$dz = dy$$

$$\int \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} + C$$

$$= -\frac{1}{y+2} + C$$

$$y(t) = \frac{2}{1-t} - 1$$

$$y(0) = \frac{2}{1-0} - 1 \stackrel{!}{=} 1 \implies \underline{C=1}$$

$$y(t) = \frac{2}{1-t} - 1$$

b) Radialsymmetrische Lösungen $u = u(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von $\Delta u = 1$

Vorlesung Analysis III/ HÜ DGL: In Polarkoordinaten $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

Löse $\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r) + 0 = 1$ $u = u(r)$
 $u_r(r) = u'(r)$

$$u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) = 1$$

$$z(r) := u'(r) \rightarrow z'(r) = u''(r)$$

→ $z'(r) + \frac{1}{r} z(r) = 1$ Lineare Dgl

$$z_h'(r) = -\frac{1}{r} z_h(r) \implies \frac{dz_h}{z_h} = -\frac{1}{r} dr \implies \int \frac{dz_h}{z_h} = -\int \frac{1}{r} dr \implies \ln(|z_h|) = -\ln(r) + d \quad r \neq 0$$

cxp →

$$z_h = \frac{c}{r}$$

$$\textcircled{*} z_p' + \frac{1}{r} z_p = 1$$

Ansatz $z_p(r) = c(r) \cdot \frac{1}{r}$

$$\xrightarrow{\text{Dgl}} \textcircled{*} c'(r) \cdot \frac{1}{r} = 1 \implies c'(r) = r \implies c(r) = \frac{r^2}{2} + k$$

$$\text{z.B. } z_p(r) = c(r) \cdot \frac{1}{r} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{r}{2} = z_p$$

$$z(r) = z_h + z_p = \frac{c}{r} + \frac{r}{2} = u'(r)$$

→ $u(r) = c \cdot \ln(r) + \frac{r^2}{4} + k$

$$u(x,y) = c \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2+y^2}{4} + k$$

c) Stationäre, radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer homogenen Kreisscheibe $\Delta T(x, y) = 0$

mit

$T(x, y) = 20$ für $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ und $T(x, y) = 15$ für $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$.

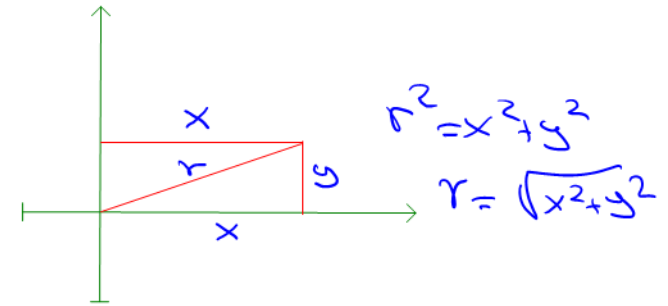
$$T_{rr} + \frac{1}{r} T_r = 0$$

$$z = T_r \quad z' = T_{rr}$$

$$z'(r) + \frac{1}{r} z = 0$$

wie z_h oben $\implies z(r) = \frac{c}{r} = T'(r)$

$$T(r) = c \ln(r) + d$$



$$\begin{cases} T = 20 & \text{für } r = 1 \\ T = 15 & \text{für } r = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(1) = c \ln(1) + d = d \stackrel{!}{=} 20 \\ T(2) = c \ln(2) + 20 \stackrel{!}{=} 15 \implies \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c \ln(2) &= -5 \\ c &= -5 / \ln(2) \end{aligned}$$

$$T(r) = -5 \frac{\ln(r)}{\ln(2)} + 20$$

$$T(x, y) = -5 \frac{\ln(\sqrt{x^2 + y^2})}{\ln(2)} + 20$$

Aufgabe 2:

a) Gesucht Lösung der Anfangswertaufgabe $y' + 3y' + y^{\frac{3}{4}} = 0$, $y(0) = 1$

Bernoullische Dgl $\alpha = 3/4$ $a = 3$ $b = -1$

Tabellensatz : Substitution $u = y^{1-\alpha} = y^{1/4}$ Dgl \rightarrow

Hilf 2

$$u' + (1-\alpha) a u = (1-\alpha) b : u' + \frac{1}{4} \cdot 3 u = \frac{1}{4} (-1)$$

Linear

$$u_h' + \frac{3}{4} u_h = 0 \quad \frac{du_h}{dt} = -\frac{3}{4} u_h$$

$$\Rightarrow \int \frac{du_h}{u_h} = -\int \frac{3}{4} dt \Rightarrow \ln(|u_h|) = -\frac{3}{4}t + \hat{c} \xrightarrow{\exp} |u_h| = e^{-\frac{3}{4}t} \cdot e^{\hat{c}} = c e^{-\frac{3}{4}t}$$

$$\Rightarrow u_h = c e^{-\frac{3}{4}t}$$

u_p für $u' + \frac{3}{4}u = -\frac{1}{4}$

Koeff'n konst, rechte Seite = Polynom nullten Grades

$\rightarrow u_p(t) = \text{Polynom nullten Grades} = k$

$$\xrightarrow[\text{up=k}]{\text{Dgl}} \underbrace{(k)'}_0 + \frac{3}{4}k = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{k = -\frac{1}{3} = u_p}$$

$$y^{1/4} = u = u_h + u_p = c e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \Rightarrow y = u^4 = \left(c e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \right)^4$$

$y(0) = 1$

$$y(0) = \underbrace{\left(c e^0 - \frac{1}{3} \right)^4}_{=1} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{4}{3}} \quad y(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \right)^4$$

b) Zeigen Sie, dass die Lösung im Intervall $[0, \frac{4}{3} \ln(4)]$ eindeutig ist.

$$y' = f(t, y)$$

$$y' = \underline{-3y - y^{3/4}} = f(t, y)$$

stetig
also beschränkt
auf jedem

$$f_y(t, y) = -3 - \frac{3}{4} y^{-1/4} = -3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$$

beschränkt auf Rechtecke
solange $y > 0$ bleibt

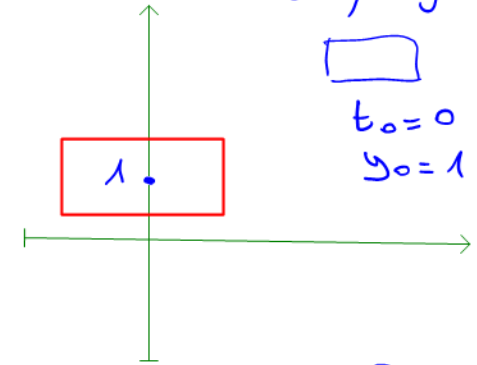
$$y=0 \rightarrow f_y \rightarrow \infty$$

Für welche t gilt $y(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \right)^4 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t} = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{3}{4}t} = \frac{1}{4} \xLeftrightarrow \ln \quad -\frac{3}{4}t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow t = -\frac{4}{3} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} \ln(4)$$

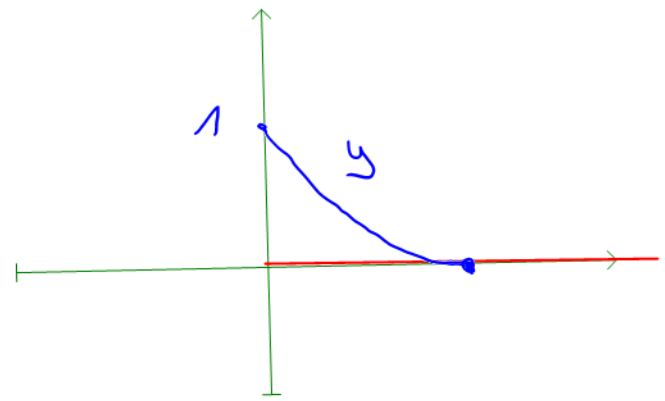
$$\Leftrightarrow \boxed{t^* = \frac{4}{3} \ln(4)}$$

$\forall 0 \leq t < t^*$ gilt f stetig in Quader um (t_0, y_0)
 f_y ist beschränkt $\Rightarrow f$ lip.stetig bzgl. y
 \implies Lösung eindeutig



c) Geben Sie eine zweite Lösung auf einem Intervall $[0, L]$ mit $L > \frac{4}{3} \ln(4)$ an.

⊛ $y' + 3y + y^{\frac{3}{4}} = 0$
 $\hat{y} \equiv 0$ ist Lsg der Dgl
 Aber nicht Lösung der AWA



Ⓛ Dgl ⊛ + $y(0) = 1$

$$z(t) = \begin{cases} y(t) & t \leq t^* \\ 0 & t > t^* \end{cases} \quad \text{stetig}$$

$$y'(t) = \left(\left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \right)^4 \right)' = 4 \left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{1}{3} \right)'$$

$$y'(t^*) = \underbrace{\left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t^*} - \frac{1}{3} \right)^2}_0 \cdot 4 \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}t^*} - \frac{1}{3} \right)'}_0 = 0$$

$$z'(t) = \begin{cases} y'(t) & t < t^* \\ 0 & t > t^* \end{cases} \quad y'(t^*) = 0$$

$\implies z'$ stetig