

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen

Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Aufgabe 1:

a) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) = f(\alpha x + \beta y(x) + \gamma)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha + \beta f(\alpha x + \beta y(x) + \gamma) \neq 0$.

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit Hilfe der Substitution

$$u(x) := \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

auf eine separierbare Differentialgleichung transformiert werden kann.

$$\frac{du}{dx} = u'(x) = \alpha + \beta y'(x) = \alpha + \beta \cdot f(u)$$

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta f(u)} = \int 1 \cdot dx$$

b) (Klausur 2008) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(x - 2y) + 0.5, \quad \underline{\underline{y(0) = 0.}}$$

$$y' = \exp(\alpha x + \beta y + \gamma) + \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta f(u)} = \int 1 \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{-2e^u} = \int 1 \cdot dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \int e^{-u} du = x + \tilde{c}$$

$$\Leftrightarrow \int -e^{-u} du = 2x + \frac{2\tilde{c}}{2} \Leftrightarrow e^{-u} = 2x + c$$

$$\Leftrightarrow \stackrel{\ln}{+} u = -\ln(2x + c) = x - 2y$$

$$\Rightarrow 2y = x + \ln(2x + c)$$

$$y(x) = \frac{1}{2} [x + \ln(2x + c)]$$

$$y(0) = \frac{1}{2} [0 + \ln(2 \cdot 0 + c)] = \frac{1}{2} \ln(c) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c = 1$$

$$y(x) = \frac{1}{2} [x + \ln(2x + 1)]$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \quad \beta = -2 \quad \gamma = 0 \\ \underline{u = 1 \cdot x - 2y} \\ y' = f(u) = e^u + \frac{1}{2} \\ u' = \alpha + \beta \cdot f(u) \\ = 1 - 2(e^u + \frac{1}{2}) \\ = 1 - 2e^u - 1 \\ = -2e^u \end{array} \right\}$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Teil b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Ist $y' = e^{x-2y} + \frac{1}{2}$

Rechte Seite $e^{x-2y} + \frac{1}{2} = e^{x-2 \cdot \frac{1}{2} [x + \ln(2x+1)]} + \frac{1}{2}$
 $= e^{-\ln(2x+1)} = \frac{1}{e^{\ln(2x+1)}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2}$

linke Seite $y'(x) = \left(\frac{1}{2} [x + \ln(2x+1)] \right)' = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2x+1} \cdot 2 \right]$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1}$

✓ Dgl erfüllt

Aufgabe 2)

Stellen Sie fest, welche der folgenden Differentialgleichungen separierbar, linear, Bernoullisch, Riccatisch oder eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung ist. Geben Sie gegebenenfalls jeweils Substitutionen an, die die Differentialgleichungen in separierbare oder lineare Differentialgleichungen überführen. Wie lauten die durch die Substitutionen erhaltenen neuen Differentialgleichungen.

Hinweis: Sie müssen die Differentialgleichungen nicht lösen, dürfen es aber gerne!

Aus der Hörsaalübung haben wir die Tabelle

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$\dot{y}(t) = h(t) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t) dt$	
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$\dot{u} = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL Lineare DGL	$\dot{y}_h(t) = -a(t)y_h(t)$ $\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + h(t)$	$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t) dt$ $y = c \cdot y_h + y_p$	separierbar
Bernoullische DGL	$\dot{y} + a(t)y^\alpha - b(t)y^\alpha = 0$	$u := y^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0, 1$	$\dot{u} + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b$ linear
Riccatische DGL	$\dot{y} + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$ c nicht ident. 0	$u := \frac{1}{y - y_p}$	$\dot{u} - [a + 2b \cdot y_p] \cdot u = b$ linear

a) $(1 + e^{2t})y' = -2e^{2t}y$

$(1 + e^{2t}) \cdot \frac{dy}{dt} = -2e^{2t} \cdot y$ $|\cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dt}{1 + e^{2t}}$

1. $y'(t) = \frac{-2e^{2t}}{1 + e^{2t}} \cdot \underbrace{y(t)}_y \implies \frac{dy}{y} = \frac{-2e^{2t} dt}{1 + e^{2t}}$ separierbar

b) $y' - 2t^2(y-1) + ty(y-2) = 1-t-t^3$.

Tipp: \exists eine Lösung $y_p(t) = \alpha t + \beta$.

$$y' - 2t^2 y + \underline{2t^2} + ty^2 - 2ty = 1 - t - t^3$$

(*) $y' - \underbrace{(2t^2 + 2t)}_a y + \underbrace{t}_b y^2 = \underline{1-t-2t^2-t^3}$

Riccati sch mit $a(t) = -2t^2 - 2t$ $b(t) = t$
brauche y_p

c) $\cos(t)y' + \sin(t)y = -\cos^2(t)y$

$\cos \neq 0$

$$y' + \frac{\sin(t)}{\cos t} y(t) = -\cos(t)y$$

$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \left(-\frac{\sin(t)}{\cos(t)} - \cos(t) \right) \cdot y$
separierbar

d) $y - \frac{1}{t} - \frac{1}{y}y' = 0$ $| \cdot y$

$$y^2 - \frac{1}{t} \cdot y - y' = 0$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)} y - \underbrace{y^2}_{b(t)} = 0 \quad \alpha = 2$$

Bernoulli

$$u = y^{1-\alpha} = y^{-1}$$

$u' + (1-\alpha)au = (1-\alpha)b$

$$u' + (-1)\frac{1}{t}u = (-1)(\frac{1}{t}) \Rightarrow u' - \frac{1}{t}u = -\frac{1}{t}$$

Linear

Setze $y_p = \alpha t + \beta$ in Dgl (*)

$$\alpha - (2t^2 + 2t)(\alpha t + \beta) + t(\alpha t + \beta)^2 = 1 - t - 2t^2 - t^3$$

$$\alpha - 2\alpha t^3 - 2\beta t^2 - 2\alpha t^2 - 2\beta t + \alpha^2 t^3 + 2\alpha\beta t^2 + \beta^2 t = 11$$

$t^0 : \alpha = 1$

$t^1 : -2\beta + \beta^2 = -1 \iff \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = 1$

$t^2 : -2\beta - 2\alpha + 2\alpha\beta = -2$
 $-2 - 2 + 2 = -2 \checkmark$

$t^3 : -2\alpha + \alpha^2 = -1$
 $-2 + 1 = -1 \checkmark$

$y_p = t + 1$

$u = \frac{1}{y - y_p} = \frac{1}{y - t - 1}$

$u' + [a + 2by_p]u = b \Rightarrow u' + [-2t^2 - 2t + 2t(t+1)]u = \frac{1}{t}$

$\implies u'(t) = t \quad u(t) = \frac{t^2}{2} + C$

$y - y_p = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{t^2}{2} + C} \quad y(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{2} + C} + t + 1$

$$e) y' = \underline{2t}(2t^2y^2 - 1)y = 4t^3y^3 - 2ty$$

$$y^{\cancel{1}} + \underline{2t} y^{\cancel{1}} - \underline{4t^3} y^{\cancel{3}} = 0$$

Bernoullische Dgl mit $\alpha=3$

$$a(t) = 2t \quad b(t) = -4t^3$$

$$u = y^{1-\alpha} = y^{-2}$$

$$u' + (1-\alpha)au = (1-\alpha)b$$

$$u' - 2 \cdot 2t \cdot u = -2 \cdot 4t^3 = -8t^3$$

$$u' - 4t \cdot u = -8t^3 \quad \text{Linear}$$

$$f) y - ty' = \frac{t^3}{y^2} \quad | \frac{1}{-t}$$

$$-\frac{1}{t}y + y' = -\frac{t^2}{y^2} \Leftrightarrow y' - \frac{y}{t} + \left(\frac{t}{y}\right)^2 \stackrel{\otimes}{=} 0 \quad \underline{\text{Ähnlichkeitsdgl.}}$$

$$y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^{-2} = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad f(u) = u - u^{-2}$$

$$u = \frac{y}{t} \quad u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u - u^{-2} - u}{t} = -u^{-2} \cdot \frac{1}{t}$$

Alternativ: Bernoulli Dgl
mit \otimes $\alpha = -2$ $u = y^{1-\alpha} = y^3$

$$u' + 3\left(-\frac{1}{t}\right)u = -3t^2 \quad \text{Linear}$$

$$u^2 du = - \int \frac{1}{t} dt \quad \text{separierbar}$$