Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) = f(\underbrace{\alpha x + \beta y(x) + \gamma}_{u})$ mit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha + \beta f(\alpha x + \beta y(x) + \gamma) \neq 0$.

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit Hilfe der Substitution $u(x) := \alpha x + \beta y(x) + \gamma$ auf eine separierbare Differentialgleichung transformiert werden kann.

$$\frac{du}{dx} = u'(x) = \alpha + \beta y'(x) = \alpha + \beta \cdot f(u)$$

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta f(u)} = \int 1 \cdot dx$$

b) (Klausur 2008) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(x - 2y) + 0.5, \qquad y(0) = 0\,.$$

$$y' = \exp(1.x - 2y + 0) + \frac{1}{2}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma$$

$$\alpha = 1 \qquad \beta = -2 \qquad \gamma = 0$$

$$u = 1.x - 2y$$

$$y' = f(u) = e^u + \frac{1}{2}$$

$$u' = \alpha + \beta . f(u) = 1 - 2\left(e^u + \frac{1}{2}\right) = 1 - 2e^u - 1 = -2e^u$$

$$\int \frac{du}{\alpha + \beta f(u)} = \int 1.\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{du}{-2e^u} = \int 1.\,dx \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}\int e^{-u}\,du = x + \tilde{C}$$

$$\Longleftrightarrow \int -e^{-u}\,du = 2x + \underbrace{2\tilde{C}}_{C} \Longleftrightarrow e^{-u} = 2x + C$$

$$\overset{\ln}{\Longleftrightarrow} \; u = \ln(2x + C) = x - 2y$$

$$\Longrightarrow \quad 2y = x + \ln(2x + C)$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[x + \ln(2x + C)\right]$$

$$y(0) = \frac{1}{2}\left[0 + \ln(2.0 + C)\right] = \frac{1}{2}\ln(C) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow C = 1$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left[x + \ln(2x + 1)\right]}$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Teil b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Ist $y' = e^{x-2y} + \frac{1}{2}$

Rechte Seite $e^{x-2y} + \frac{1}{2} = e^{x - \cancel{2}\cancel{\frac{1}{2}}[x + \ln(2x+1)]} + \frac{1}{2}$

$= e^{-\ln(2x+1)} = \frac{1}{e^{\ln(2x+1)}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2}$

linke Seite $y'(x) = \left(\frac{1}{2}\left[x + \ln(2x+1)\right]\right)' = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2x+1} \cdot 2\right]$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x+1}$

✓ Dgl erfüllt

Aufgabe 2)

Stellen Sie fest, welche der folgenden Differentialgleichungen separierbar, linear, Bernoullisch, Riccatisch oder eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung ist. Geben Sie gegebenenfalls jeweils Substitutionen an, die die Differentialgleichungen in separierbare oder lineare Differentialgleichungen überführen. Wie lauten die durch die Substitutionen erhaltenen neuen Differentialgleichungen.

Hinweis: Sie müssen die Differentialgleichungen nicht lösen, dürfen es aber gerne!

Aus der Hörsaalübung haben wir die Tabelle

Typ	DGL~~d~~	Lösung/Subst~~d~~	ggf. neue DGL
separierbar	$\dot{y}(t) = h(t) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$\dot{u} = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL Lineare DGL	$\dot{y}_h(t) = -a(t)y_h(t)$ $\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + h(t)$	$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$ $y = c \cdot y_h + y_p$	separierbar
Bernoullische DGL	$\dot{y} + a(t)y - b(t)y^{\alpha} = 0$	$u := y^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0,\ 1$	$\dot{u} + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b$ linear
Riccatische DGL	$\dot{y} + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$ c nicht ident. 0	$u := \frac{1}{y - y_p}$	$\dot{u} - [a + 2b \cdot y_p] \cdot u = b$ linear

a) $(1 + e^{2t})y' = -2e^{2t}y$

$$(1+e^{2t})\cdot\frac{dy}{dt} = -2e^{2t}\cdot y \qquad \Big|\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dt}{1+e^{2t}}$$

1\. $y'(t) = \frac{-2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\underbrace{y(t)}_{y} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-2e^{2t}\,dt}{1+e^{2t}}$ separierbar

b) $1\cdot y' - 2t^2(y-1) + ty(y-2) = 1 - t - t^3.$ Tipp: $\exists$ eine Lösung $y_p(t) = \alpha t + \beta.$

$$y' - 2t^2 y + 2t^2 + ty^2 - 2ty = 1 - t - t^3 \qquad \Big| -2t^2$$

$$(*) \quad y' \underbrace{-(2t^2+2t)}_{a} y^1 + \underbrace{t}_{b} y^2 = 1 - t - 2t^2 - t^3$$

Riccatisch mit $a(t) = -2t^2 - 2t$, $b(t) = t$

braucht y_p

Setze $y_p = \alpha t + \beta$ in Dgl $(*)$

$$\alpha - (2t^2+2t)(\alpha t + \beta) + t(\alpha t + \beta)^2 = 1 - t - 2t^2 - t^3$$

$$\alpha - 2\alpha t^3 - 2\beta t^2 - 2\alpha t^2 - 2\beta t + \alpha^2 t^3 + 2\alpha\beta t^2 + \beta^2 t = \text{''}$$

t^0: $\boxed{\alpha = 1}$

t^1: $-2\beta + \beta^2 = -1 \iff \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$

t^2: $-2\beta - 2\alpha + 2\alpha\beta \stackrel{!}{=} -2$

$-2 - 2 + 2 = -2$ ✓

t^3: $-2\alpha + \alpha^2 \stackrel{?}{=} -1$

$-2 + 1 = -1$ ✓

$$\boxed{y_p = t + 1}$$

$$u = \frac{1}{y - y_p} = \frac{1}{y - t - 1}$$

$$u' + [a + 2b y_p] u = b \Rightarrow u' + [-2t^2 - 2t + 2t(t+1)] u = t$$

$$\Longrightarrow u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2} + C$$

$$y - y_p = \frac{1}{u} = \frac{1}{t^2/2 + C} \qquad y(t) = \frac{1}{t^2/2 + C} + t + 1$$

c) $\cos(t)y' + \sin(t)y = -\cos^2(t)y$

$\cos t \neq 0$: $\quad y' + \frac{\sin(t)}{\cos t} y(t) = -\cos(t)\, y$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \left(-\frac{\sin(t)}{\cos(t)} - \cos(t)\right) \cdot y$$

separierbar

d) $y - \frac{1}{t} - \frac{1}{y}y' = 0 \qquad | \cdot y$

$$y^2 - \frac{1}{t} \cdot y - y' = 0$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)} y \underbrace{-}_{-b(t)} y^2 = 0 \qquad \alpha = 2$$

Bernoulli

$$u = y^{1-\alpha} = y^{-1}$$

$$\Rightarrow u' + (1-\alpha) a u = (1-\alpha) b$$

$$u' + (-1)\frac{1}{t} u = (-1)(+1) \Rightarrow u' - \frac{1}{t} u = -1$$

Linear

e) $y' = 2t(2t^2y^2 - 1)y = 4t^3y^3 - 2ty$

$y' + 2t\,y^1 - 4t^3\,y^3 = 0$

Bernoullische Dgl mit $\alpha = 3$

$a(t) = 2t \qquad b(t) = -4t^3$

$u = y^{1-\alpha} = y^{-2}$

$u' + (1-\alpha)\,a u = (1-\alpha)\,b$

$u' - 2 \cdot 2t \cdot u = -2 \cdot 4t^3 = -8t^3$

$u' - 4t \cdot u = -8t^3$ Linear

f) $y - ty' = \dfrac{t^3}{y^2} \qquad \Big| \dfrac{1}{-t}$

$-\dfrac{1}{t}y + y' = -\dfrac{t^2}{y^2} \iff y' - \dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{t}{y}\right)^2 = 0$ ⊛

Ähnlichkeitsdgl.

$y' = \dfrac{y}{t} - \left(\dfrac{y}{t}\right)^{-2} = f\left(\dfrac{y}{t}\right) \qquad f(u) = u - u^{-2}$

$u = \dfrac{y}{t} \qquad u' = \dfrac{f(u) - u}{t}$

$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u - u^{-2} - u}{t} = -u^{-2} \cdot \dfrac{1}{t}$

$u^2\,du = -\int \dfrac{1}{t}\,dt$ separierbar

Alternativ: Bernoulli Dgl mit ⊛ $\alpha = -2 \qquad u = y^{1-\alpha} = y^3$

$u' + 3\left(-\dfrac{1}{t}\right)u = -3t^2$ linear