Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. Jens. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1,Hausaufgaben

(Wiederholung ausgewählter Themen aus Mathematik II)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

EWe direkt ablesbar

$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 5 \quad \lambda_4 = 5$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

nicht nötig aber oft in Klausuren gesehen

$$= (5-\lambda)(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$= (5-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

noch unnötiger: ausmultiplizieren

$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = 5 \qquad \lambda_4 = 5$

Eigenvektoren $\quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\lambda_1 = -3 \qquad (A - (-3I))\,\vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{[1]} \\ v_2^{[1]} \\ v_3^{[1]} \\ v_4^{[1]} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$8v_1 + v_2 = 0 \qquad v_1 = -\frac{1}{8}v_2$

$8v_2 + v_4 = 0 \qquad v_4 = -8v_2$

$2v_3 + v_4 = 0 \qquad v_3 = -\frac{1}{2}v_4$

$0 = 0$ ✓

wähle z. B. $\quad v_2 = 1 \qquad v_1 = -\frac{1}{8}$

$v_4 = -8$

$v_3 = 4$

$$v^{[1]} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ ist EV}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad (A - (-1 \cdot I))\,\vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6v_1 + v_2 \\ 6v_2 + v_4 \\ v_4 \\ -2v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. + 4. Zeile $\Longrightarrow v_4 = 0$

2. Zeile $\quad 6v_2 + 0 = 0 \Longrightarrow v_2 = 0$

1. Zeile $\quad 6v_1 + 0 = 0 \Longrightarrow v_1 = 0$

$0 \neq v_3$ frei wählbar $\qquad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zu $\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 5$

$\alpha(5) = 2$

algebr. Vielfachheit

$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Zeile, 4. Zeile $-8v_4 = 0 \Longrightarrow v_4 = 0$

3. " $-6v_3 + v_4 = 0 \Longrightarrow v_3 = 0$

1. Zeile $v_2 = 0$

$0 \neq v_1$ frei

$$v^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 EV – Richtung gibt es nicht

geom. Vielfachheit $= 1 < 2 = \alpha(5)$

$\Longrightarrow \exists$ Hauptvektor w

$(A - \lambda I) \cdot HV = EV$: $(A - 5I)\vec{w} = v^{[3]}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow w_2 = 1$$

$w_3 = w_4 = 0$

w_1 frei

z. B. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: *Bitte üben Sie hier unbedingt die Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte und arbeiten Sie nicht nur mit der Rgel von Sarrus!*

a) Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und $\lambda = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\boldsymbol{v}$. Zeigen Sie, dass dann $\bar{\lambda} = a - ib$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\bar{\boldsymbol{v}}$ ist.

$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$?

$\iff \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda \mathbf{v}}$

$\iff \bar{A}\,\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{v}}$

$\overset{A \text{ reell}}{\iff} A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$

Ziel

$A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(B-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot (-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} + (1-\lambda)(-1)^{2+2} \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ 0\,(-1)^{3+2} \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - (-9)\right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow (1-\lambda) = 0 \quad \text{oder} \quad (2-\lambda)^2 - (-9) = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \qquad (2-\lambda)^2 = -9 \Longleftrightarrow 2-\lambda = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{9}$$

$$\Longleftrightarrow 2-\lambda = \pm i\,3$$

$$\boxed{\lambda_{2,3} = 2 \mp 3i}$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad (B - 1 \cdot I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow v_1 + 3v_3 = 0$

$v_1 = -3v_3$

$\rightarrow 2v_1 + 2v_3 = 0$

$v_1 = -v_3$

$\Rightarrow v_3 = 3v_3 \Rightarrow$

$v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$

$\downarrow$

v_2 frei

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_1 = 1$$

letzte Zeile

$$-3v_1 + v_3 = 0$$

erfüllt für $v_1 = v_3 = 0$

$\lambda_2 = 2 - 3i$

$$(B - \lambda_2 I)\vec{w} = \begin{pmatrix} 2-(2-3i) & 0 & 3 \\ 2 & 1-(2-3i) & 2 \\ -3 & 0 & 2-(2-3i) \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 3 \\ 2 & -1+3i & 2 \\ -3 & 0 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{3}i\, w_1 + \cancel{3} w_3 = 0 \qquad \boxed{w_3 = -i w_1}$$

$$2w_1 + (-1+3i)w_2 + 2(-iw_1) = 0 \iff 2(1-i)w_1 + (-1+3i)w_2 = 0$$

$$\iff (2-2i)w_1 = (1-3i)w_2 \qquad \boxed{w_2 = \frac{2-2i}{1-3i} w_1}$$

$$-3w_1 + 3i(-iw_1) = -3w_1 - 3\underbrace{i^2}_{=-1} w_1 = -3w_1 + 3w_1 = 0 \quad ✓$$

$$\boxed{\vec{w} = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2-2i \\ -i-3 \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_2 = 2-3i}$$

$$w_3 = -iw_1 = -i(1-3i) = -i + 3i^2 = -3 - i$$

$$\lambda_3 = 2 + 3i = \overline{\lambda_2} \implies \vec{u} = \overline{\vec{w}} \quad \text{EV zu } \lambda_3$$

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2+2i \\ -3+i \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_3 = 2+3i}$$