

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

(Wiederholung ausgewählter Themen aus Mathematik II)

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch

nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

EWe direkt ablesbar
 $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = -1$ ←
 $\lambda_3 = 5$ $\lambda_4 = 5$ ←

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

nicht
nötig
aber oft
in Klausuren
gesehen

$$= (5-\lambda)(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

noch unnötiger: ausmultiplizieren

$$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 5 \quad \lambda_4 = 5$$

Eigenvektoren $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$

$$\lambda_1 = -3 \quad (A - (-3I)) \vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{[1]} \\ v_2^{[1]} \\ v_3^{[1]} \\ v_4^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$8v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 = -\frac{1}{8}v_2$$

$$8v_2 + v_4 = 0$$

$$v_4 = -8v_2$$

$$2v_3 + v_4 = 0$$

$$v_3 = -\frac{1}{2}v_4$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

wähle z. B. $v_2 = 1$

$$v_1 = -\frac{1}{8}$$

$$v_4 = -8$$

$$v_3 = 4$$

$$\underline{\underline{\vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ ist EV}}}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad (A - (-1 \cdot I)) \vec{v}^{[2,3]} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6v_1 + v_2 \\ 6v_2 + v_4 \\ v_4 \\ -2v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3. + 4. \text{ Zeile} \Rightarrow v_4 = 0$$

$$2. \text{ Zeile } 6v_2 + 0 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$

$$1. \text{ Zeile } 6v_1 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

$0 \neq v_3$ frei wählbar

$$\vec{v}^{[2,3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 5$$

$$\alpha(5) = 2$$

algebr. Vielfachheit

$$(A - 5I) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2. \text{ Zeile, } \\ 4. \text{ Zeile } -8v_4 = 0 \implies v_4 = 0 \\ 3. \text{ " } -6v_3 + v_4 = 0 \implies v_3 = 0 \\ 1. \text{ Zeile } v_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \neq v_1 \text{ frei} \\ v^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 EV-Richtung gibt es nicht

geom. Vielfachheit = 1 < 2 = $\alpha(5)$
 $\implies \exists$ Hauptvektor w

$$(A - \lambda I) \cdot HV = EV \quad : \quad (A - 5I) \vec{w} = v^{[3]}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \longrightarrow w_2 = 1 \\ w_3 = w_4 = 0 \\ w_1 \text{ frei} \end{array} \right\}$$

$$\text{z. B. } \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Bitte üben Sie hier unbedingt die Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte und arbeiten Sie nicht nur mit der Regel von Sarrus!

- a) Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und $\lambda = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor v . Zeigen Sie, dass dann $\bar{\lambda} = a - ib$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \bar{v} ist.

$$\begin{aligned}
 & A v = \lambda v \quad \text{--- ? ---} \\
 \Leftrightarrow & \overline{A v} = \overline{\lambda v} \\
 \Leftrightarrow & \overline{A} \overline{v} = \overline{\lambda} \overline{v} \\
 \xleftarrow{A \text{ reell}} & A \overline{v} = \overline{\lambda} \overline{v}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ziel} \\ A \overline{v} = \overline{\lambda} \overline{v} \end{array} \right\}$$

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot (-1)^{\lambda+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} + (1-\lambda)(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (1-\lambda) [(2-\lambda)^2 - (-9)] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) = 0 \quad \text{oder} \quad (2-\lambda)^2 - (-9) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$(2-\lambda)^2 = -9 \Leftrightarrow 2-\lambda = \pm \sqrt{-9} = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow 2-\lambda = \pm i3$$

$$\boxed{\lambda_{2,3} = 2 \mp 3i}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$(B - \lambda_1 I) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{v_2 \text{ frei}}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow v_1 + 3v_3 = 0 \\ &\quad \quad \quad v_1 = -3v_3 \\ &\rightarrow 2v_1 + 2v_3 = 0 \\ &\quad \quad \quad v_1 = -v_3 \\ &\Rightarrow v_3 = 3v_3 \Rightarrow \\ &v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_1 = 1$$

letzte Zeile
 $-3v_1 + v_3 = 0$
 erfüllt für $v_1 = v_3 = 0$

$$\lambda_2 = 2 - 3i$$

$$(\mathcal{B} - \lambda_2 \mathbf{I}) \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 - (2 - 3i) & 0 & 3 \\ 2 & 1 - (2 - 3i) & 2 \\ -3 & 0 & 2 - (2 - 3i) \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 3 \\ 2 & -1 + 3i & 2 \\ -3 & 0 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3i w_1 + 3 w_3 = 0 \quad \boxed{w_3 = -i w_1}$$

$$2 w_1 + (-1 + 3i) w_2 + 2(-i w_1) = 0 \iff 2(1 - i) w_1 + (-1 + 3i) w_2 = 0$$

$$\iff (2 - 2i) w_1 = (1 - 3i) w_2$$

$$\boxed{w_2 = \frac{2 - 2i}{1 - 3i} w_1}$$

$$-3 w_1 + 3i(-i w_1) = -3 w_1 - 3i^2 w_1 = -3 w_1 + 3 w_1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 2 - 2i \\ -i - 3 \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_2 = 2 - 3i$$

$$w_3 = -i w_1 = -i(1 - 3i) = -i + 3i^2 = -3 - i$$

$$\lambda_3 = 2 + 3i = \overline{\lambda_2} \implies \vec{u} = \overline{\vec{w}} \quad \text{EV zu } \lambda_3$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2 + 2i \\ -3 + i \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_3 = 2 + 3i$$

