Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Struckmeier

SoSe 2021

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

08. September 2021

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\sum$ =

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Differentialgleichungen linear sind und welche von zweiter Ordnung sind.

a) $y(t)^2 - 2y'(t) = e^{-t}\,.$

b) $y'(t) - t^2 y(t) = e^{-t}\,.$

c) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2\,.$

d) $y''(t) + 2y'(t) - \ y(t)^4 = 0\,.$

Hinweis: Sie müssen die Differentialgleichungen nicht lösen!

Lösung 1:

b und c sind linear.

c und d sind von zweiter Ordnung.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe

$$y'(t) - \frac{1}{t}\, y(t) = -t \cdot e^{-t+1}, \qquad t \geq 1, \qquad y(1) = 2022.$$

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Aufgabe

$$\frac{dy_h}{dt} = \frac{1}{t} \cdot y_h \iff \int \frac{dy_h}{y_h} = -\int \frac{dt}{t}$$
$$\iff \ln|y_h| = \ln|t| + k \implies y_h = \pm e^k t$$

Zusammen mit der trivialen Lösung erhalten wir

$y_h(t) = c \cdot t \qquad c \in \mathbb{R}\,.$ **(2 Punkte)**

Lösung der inhomogenen DGL (Variation der Konstanten)

$y_p(t) := c(t)t \stackrel{DGL}{\longrightarrow} c'(t)t \stackrel{!}{=} -t \cdot e^{-t+1}.$

Wir erhalten also mit

$c'(t) = -\, e^{-t+1}$ z.B. $c(t) = e^{-t+1}, \qquad y_p(t) = te^{-t+1}$

und damit

$y(t) = (c + e^{-t+1})\, t\,.$ **(2 Punkte)**

Die Anfangsbedingung

$y(1) = (c + e^{-1+1}) \cdot 1 = 2022$

liefert $c = 2021\,.$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 6\,y' + 10\,y = 1 + 2t\,.$$

Tipp: Verwenden Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung einen polynomialen Ansatz.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = (\lambda - 3)^2 + 1 = 0 \iff \lambda = 3 \pm i\,. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$z_h(t) = c_1 e^{(3+i)t} + c_2 \cdot e^{(3-i)t}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Reelle Darstellung:

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\,(e^{(3+i)t}) = \mathrm{Re}\,\left(e^{3t} \cdot e^{it}\right) = e^{3t}\mathrm{Re}\,(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) = e^{3t}\cos(t)\,.$$

$$y_2(t) = \mathrm{Im}\,(e^{(3+i)t}) = e^{3t}\mathrm{Im}\,(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) = e^{3t}\sin(t)\,.$$

Damit erhalten wir eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(t) = e^{3t} \cdot [c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)]\,. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Der Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe $y_p(t) = a + bt$ liefert eingesetzt in die Differentialgleichung

$$0 - 6b + 10a + 10bt = 1 + 2t \iff b = \frac{1}{5},\ 10a = 1 + 6b \implies a = \frac{11}{50}\,.$$

Also $y_p(t) = \frac{11}{50} + \frac{1}{5}\,t\,.$ **(2 Punkte)**

Damit erhalten wir als allg. Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} \cdot \cos(t) + c_2 e^{3t} \cdot \sin(t) + \frac{11}{50} + \frac{1}{5}\,t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 4 (5 + 1 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{y}}\,(t) \;=\; \boldsymbol{A}\,\cdot\,\boldsymbol{y}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot\, \boldsymbol{y}\,(t).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

b) Ist der stationäre Punkt $(0,0,0)^T$ des Systems stabil? Begründen Sie Ihre Antwort .

Lösung :

a) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ können auf der Diagonalen abgelesen werden.

Es ist völlig unnötig, aber wer das charakteristische Polynom berechnet, sollte folgendes erhalten:

$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} \;=\; (-3-\lambda)\cdot\lambda^2.$$

$P(\lambda) \,=\, 0 \implies \lambda_1 = -3\,,\ \lambda_2 =\, \lambda_3 \,=\, 0\,.$

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3v_1 + v_2 + 2v_3 \\ 3v_2 + v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Zeile: $v_3 \,=\, -3v_2\,.$

1. Zeile: $3v_1 + v_2 - 6v_2 = 3v_1 - 5v_2 \,=\, 0 \implies v_1 \,=\, \frac{5}{3}\,v_2\,.$

Wir können also zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[1]} := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ und

$$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) \,=\, e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

wählen.

$\lambda_2 \,=\, \lambda_3 \,=\, 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Zeile 2 bzw. 3: $\qquad v_3 \,=\, 0\,.$

Aus Zeile 1 folgt mit $v_3 = 0$: $\qquad v_2 \,=\, 0\,.$

Die einzige Eigenvektorrichtung ist also

$$\Longleftarrow \quad \boldsymbol{v}^T = (1,0,0)^T, \text{ und damit zum } \quad \boldsymbol{y}^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 Punkte)}\,.$$

Berechnung eines zugehörigen Hauptvektors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Zeile 2 bzw. 3: $\qquad w_3 = 0\,.$

Aus Zeile 1 folgt mit $w_3 = 0$: $\qquad w_2 = 1\,.$

Also zum Beispiel $\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\boldsymbol{y}^{[3]}(t) = t\,\boldsymbol{v}^{[2]} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\,\boldsymbol{y}^{[1]}(t) + c_2\,\boldsymbol{y}^{[2]}(t) + c_3\,\boldsymbol{y}^{[3]}(t) \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

b) Mit $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ liegt ein (algebraisch) doppelter Eigenwert mit Realteil Null vor. Nach Teil a) hat der Eigenraum zu diesem Eigenwert die Dimension Eins. Der stationäre Punkt ist instabil. **(1 Punkt)**