

## **Klausurberatung Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

**Video, Notizen und Beispiele nach der letzten Vorlesung. Voraussichtlich  
in der ersten Februarwoche!**

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

# Absolut notwendige Werkzeuge:

- Sicheres partielles ableiten,
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren berechnen,
- Skalarprodukt,
- Lineare Gleichungssysteme lösen (Eigenvektoren, Parameter aus allg. Lösung mittels Anfangswerte berechnen)

# Top Themen der letzten Klausuren

- Elementare Lösungsmethoden

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = \underline{h(t)} \cdot \underline{g(y)}$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t) dt$	
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ $f(y/t)$	$\underline{u(t)} := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f(\underline{at + by(t) + c})$	$\underline{u} := at + by(t) + c$	$\dot{u} = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL Lineare DGL	$\frac{dy_h}{dt} = \dot{y}_h(t) = -a(t)y_h(t)$ $\dot{y}(t) = -a(t)\dot{y}(t) + \underline{h(t)}$	$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t) dt$ $y = \underline{c \cdot y_h} + \underline{y_p}$	separierbar V.d.K./spez. Ansätze
Bernoullische DGL	$\dot{y} + a(t)y^\alpha - b(t)y^\alpha = 0$	$u := y^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0, 1$	$\dot{u} + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b$ linear
Riccatische DGL	$\dot{y} + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$ $b, c$ nicht ident. 0	$u := \frac{1}{y - y_p}$	$\dot{u} - [a + 2b \cdot y_p] \cdot u = b$ linear

$\dot{y}(t) + t y(t) + t^2 (y(t))^3 = 0$   
 $\dot{y} + t y + t^2 y^3 = 0$

$\alpha = 3$   
 $u = y^{1-3} = y^{-2}$

$a = t \quad b = -t^2$

$\dot{u} + (-2)t u = -2t^2$

$\dot{u}_h - 2t u_h = 0$   
 $\frac{du_h}{dt} = 2t u_h$

$\int \frac{du_h}{u_h} = \int 2t dt \rightarrow \ln |u_h| = t^2 + \hat{c}$   
 $\xrightarrow{\text{Exp}} \dots u_h = c e^{t^2}$

Achtung: Vorzeichenfehler im Video

Ansatz 2  $u_p = c(t) e^{t^2}$

$$\text{Dgl } \dot{c}(t) e^{t^2} = + 2t^2 \dots$$

Bei allen dieser Typen

Typ? *Tabulle*  
ggf. Substitution angeben // ggf. neu Dgl angeben

→ lineare

inhomogene Dgl →  $y_p$

homogene Dgl →  $c y_h$

$$y = c y_h + y_p$$

oder → separierbare Einzeldifferentialgleichung  $y' = a(t)y$  *direkt integrieren*

Passende Aufgaben: Blatt 2: P1, P2, H2, H1 (nach Substitution  $u = ax + by + c$ ), Blatt 3: H2a

- Exakte Differentialgleichungen und Potentiale

- Exaktheit prüfen
- Potential bestimmen
- Nach  $y$  auflösen

$$g(t, y) + h(t, y) \dot{y} = 0$$
$$g(t, y(t)) + h(t, y(t)) \dot{y}(t) = 0$$

$$\rightarrow \gamma = h t ?$$

$$\phi_t = g \quad \phi_y = h$$

$$\phi(t, y) = K$$

Passende Aufgaben: Blatt 3: P1

- Lineare Systeme  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$

- Bei Konstanten Koeffizienten: Fundamentalsystem berechnen, reelle Darstellung der allgemeinen Lösung

für  $\vec{y}' = A\vec{y}$

$c_1 \vec{y}^{[1]} + c_2 \vec{y}^{[2]} + \dots + c_n \vec{y}^{[n]}$

- Spezieller Ansatz  $\mathbf{y}_p(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  für partikuläre Lösung des inhomogenen Systems bei  $\mathbf{h}(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ , wenn  $\mu$  keine EW von  $A$ .

- Variation der Konstanten für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$\vec{y}_p = c_1(t) \vec{y}^{[1]} + c_2(t) \vec{y}^{[2]} + \dots + c_n(t) \vec{y}^{[n]}$

- Parameter aus allgemeiner Lösung mit Hilfe von Anfangs- oder Randwerten bestimmen

Passende Aufgaben: Blatt 4: P1, H2,

- Stabilität: Lineare Systeme  $y' = Ay$  bzw. nichtlinear  $y' = f(y)$ 
  - Stationäre Punkte bzw. Ruhelagen  $y^*$  sind solche für die  $y' = 0$  gilt.
  - **Linear:  $y' = Ay$**   
Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  von  $A$  berechnen.  
Vorzeichen der Realteile von  $\lambda_k$  und eventuell  
Dimension Eigenraum zu  $\lambda_k$ s mit  $\text{Re}(\lambda_k) = 0$  entscheiden!  
Passende Aufgaben: Blatt 5: P1, H1

– **Nichtlinear:**  $y' = f(y)$

Erste Möglichkeit der Prüfung der Stabilität von stationären Punkten:

Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  von  $\mathbf{Jf}$  berechnen.

Vorzeichen der Realteile von  $\lambda_k$  entscheiden!

Bei Realteil Eigenwert = 0 keine Aussage bzgl. Stabilität möglich:  $\longrightarrow$

Ljapunov

Passende Aufgaben: Blatt 5: P2, H2

– Ljapunov Funktion: im Punkt  $(0,0)$ :

\*  $V(0,0) = 0$

\*  $V(y_1, y_2) > 0, \forall (y_1, y_2) \neq (0,0)$   
mindestens in einer Kreisscheibe um  $(0,0)$ .

\*  $\langle (\text{grad } V)^T, \mathbf{f} \rangle \leq 0.$

Passende Aufgabe: Blatt 5, H3



- Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2y' + y = 0$$

- Allgemeine Lösung für homogene Gleichung
- Partikuläre Lösung für inhomogenes Problem: spezielle Ansätze
- Wer spezielle Ansätze nicht mag/kann, muss Matrixschreibweise und Variation der Konstanten können

Passende Aufgaben: Blatt 4, P2, H3

- Randwertaufgaben: fielen der verkürzten Vorlesungszeit zum Opfer!

Stichworte zum erkennen in alten Klausuren:

Matrixschreibweise,

Für welche Randwerte gibt es eindeutige Lösung

Regularität der Shootingmatrix

- Variationsrechnung: fiel der verkürzten Vorlesungszeit zum Opfer!

Stichworte zum erkennen in alten Klausuren:

Euler-Lagrange-Gleichung

Natürliche Randbedingung

Lösen der entstehenden Randwertaufgabe

- Laplace-Transformation. fiel der verkürzten Vorlesungszeit zum Opfer!

- **Blatt 1:**

- Aufgabe: Modellierung, Lösung bei gegebenem Ansatz verifizieren/finden.

- **Blätter 2:**

- Aufgabe B2-P1: separierbare Differentialgleichungen , Anfangswerte ✕

- Aufgabe B2-P2: lineare Differentialgleichungen ,  
spezielle Ansätze für inhomogene lineare Dgl., Variation der Konstanten ✕

- Aufgabe B2-H1: 1a: Nachweis Ähnlichkeitsdifferentialgleichung  $\rightarrow$  Li-  
neare Differentialgleichung  $\emptyset$

- Aufgabe B2-H1: 1b: Lösen Ähnlichkeitsdifferentialgleichung mit Hilfe der  
Substitution aus a), Zugehörige Anfangswertaufgabe

- Aufgabe B2-H1: 1c: Lösung aus b) durch Einsetzen überprüfen.

- Aufgabe B2-H2: Typ erkennen, geeignete Substitution und neue  
Differentialgleichung angeben

erkl.  
50%

- **Blätter 3:**

- Aufgabe B3-P1: Auf Exaktheit prüfen  
Gegebenenfalls Potential bestimmen und lösen  $\times \times \times$
- Aufgabe B3-P2-a: Spezielle Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung  
(nichtlinear oder nicht konstante Koeffizienten)  $\phi$
- Aufgabe B3-P2-b: Randwertaufgaben zu Differentialgleichung aus 1a)  
Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen  $\phi$
- Aufgabe B3-H1-a: Spezielle Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung  
(nichtlinear oder nicht konstante Koeffizienten)  $\phi$
- Aufgabe B3-H2: Bernoullische Differentialgleichung
  - a) Erkennen, Substituieren, Lösen der Differentialgleichung  $\times \times \times$   
Anfangswertaufgabe lösen
  - b, c) Existenz und Eindeutigkeit  $\phi$

- Blätter 4:

- Aufgabe B4-P1: Lineares 2x2 System, konstante Koeffizienten, homogen, reelles Fundamentalsystem bestimmen ×××  
Nötig: Eigenwerte, komplexe Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren
- Aufgabe B4-P2: Lineares Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten z.B.  $y'' + 2y' + y = \cos(t)$  × erkl. Sose  
inhomogen, Umschreiben auf System, Variation der Konstanten
- Aufgabe B4-H1: Lineares System, nicht konstante Koeffizienten, Fundamentalsystem überprüfen, Variation der Konstanten, Anfangswertaufgabe ×
- Aufgabe B4-H2: Lineares 2x2 System, konstante Koeffizienten, inhomogen, komplexe Eigenwerte, gesucht reelles Fundamentalsystem  
Spezieller Ansatz für  $y_p$ .

×××

- **Blatt 5:**

- Aufgabe B5-P1: Stabilität lineares System, Ruhelage  $\mathbf{0}$ , System  $2 \times 2$  bzw.  $3 \times 3$  Parameterabhängig  $\times \times \times$
- Aufgabe B5-P2: Stabilität nicht linear, Jacobi-Matrix untersuchen  $\times$
- Aufgabe B5-H1: Stabilität lineares System,  $3 \times 3$ , Parameterabhängig  $\times \times \times$
- Aufgabe B5-H2: Stabilität nicht linear, Jacobi-Matrix untersuchen  $\times$
- Aufgabe B5-H3: System nicht linear, Ljapunov  $\phi$