Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 20/21
Dr. Hanna Peywand Kiani

Klausurberatung Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Video, Notizen und Beispiele nach der letzten Vorlesung. Voraussichtlich in der ersten Februarwoche!

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Sicheres partielles ableiten,
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren berechnen,
- Skalarprodukt,
- Lineare Gleichungssysteme lösen (Eigenvektoren, Parameter aus allg. Lösung mittels Anfangswerte berechnen)

Top Themen der letzten Klausuren

- Elementare Lösungsmethoden

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = h(t) \cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ $f(y/t)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u)-u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$\dot{y}(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$\dot{u} = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL Lineare DGL	$\frac{dy_h}{dt} = \dot{y}_h(t) = -a(t)y_h(t)$ $\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + h(t)$	$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$ $y = c \cdot y_h + y_p$	separierbar V.d.K./spez.Ansätze
Bernoullische DGL	$\dot{y} + a(t)y - b(t)y^{\alpha} = 0$	$u := y^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0, 1$	$\dot{u} + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b$ linear
Riccatische DGL	$\dot{y} + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$ b, c nicht ident. 0	$u := \frac{1}{y - y_p}$	$\dot{u} - [a + 2b \cdot y_p] \cdot u = b$ linear

$\dot{y}(t) + t y(t) + t^2 (y(t))^3 = 0$

$\dot{y} + ty + t^2 y^3 = 0$

$\alpha = 3$

$u = y^{1-3} = y^{-2}$

$a = t \qquad b = -t^2$

X $\dot{u} + (-2) t u = -2(-t^2)$

Achtung: Vorzeichenfehler im Video

$\dot{u}_h - 2t u_h = 0$

$\frac{du_h}{dt} = 2t u_h$

$\int \frac{du_h}{u_h} = \int 2t\, dt \to \ln(|u_h|) = t^2 + \hat{c}$

$\xrightarrow{\exp} \dots \quad u_h = c e^{t^2}$

Ansatz $u_p = c(t) e^{t^2}$

Dgl $\dot{c}(t)\, e^{t^2} = + 2t^2 \dots$

Bei allen dieser Typen

Typ ? Tabelle

ggf. Substitution angeben // ggf. neu Dgl angeben

$\longrightarrow$ lineare

inhomogene Dgl $\longrightarrow y_p$

homogene Dgl $\longrightarrow c y_h$

$y = c y_h + y_p$

oder $\longrightarrow$ separierbare Einzeldifferentialgleichung $y' = a(t)y$ direkt integrieren

Passende Aufgaben: Blatt 2: P1, P2, H2, H1 (nach Substitution $u = ax + by + c$), Blatt 3: H2a

- Exakte Differentialgleichungen und Potentiale
  - Exaktheit prüfen
  - Potential bestimmen
  - Nach y auflösen

  Passende Aufgaben: Blatt 3: P1

$g(t,y) + h(t,y)\,\dot{y} = 0$

$g(t,y(t)) + h(t,y(t))\,\dot{y}(t) = 0$

$g_y = h_t$?

$\phi_t = g \qquad \phi_y = h$

$\phi(t,y) = K$

- Lineare Systeme $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(t)$
  - Bei Konstanten Koeffizienten: Fundamentalsystem berechnen, reelle Darstellung der allgemeinen Lösung

    für $\vec{y}\,' = A\vec{y}$

    $c_1 \vec{y}^{[1]} + c_2 \vec{y}^{[2]} + \dots + c_n \vec{y}^{[n]}$
  - Spezieller Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ für partikuläre Lösung des inhomogenen Systems bei $\boldsymbol{h}(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, wenn μ keine EW von A.
  - Variation der Konstanten für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

    $\vec{y}_p = c_1(t)\vec{y}^{[1]} + c_2(t)\vec{y}^{[2]} + \dots + c_n(t)\vec{y}^{[n]}$
  - Parameter aus allgemeiner Lösung mit Hilfe von Anfangs- oder Randwerten bestimmen

Passende Aufgaben: Blatt 4: P1, H2,

- Stabilität: Lineare Systeme $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ bzw. nichtlinear $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$
  - Stationäre Punkte bzw. Ruhelagen $\boldsymbol{y}^*$ sind solche für die $\boldsymbol{y}' = 0$ gilt.
  - **Linear:** $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$

    Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von $\boldsymbol{A}$ berechnen.

    Vorzeichen der Realteile von λ_k und eventuell

    Dimension Eigenraum zu λ_ks mit $\text{Re}\,(\lambda_k) = 0$ entscheiden!

    Passende Aufgaben: Blatt 5: P1, H1

– **Nichtlinear:** $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

Erste Möglichkeit der Prüfung der Stabilität von stationären Punkten:
Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$ berechnen.
Vorzeichen der Realteile von λ_k entscheiden!
Bei Realteil Eigenwert $= 0$ keine Aussage bzgl. Stabilität möglich: $\longrightarrow$ Ljapunov
Passende Aufgaben: Blatt 5: P2, H2

– Ljapunov Funktion: im Punkt (0,0):
  * $V(0,0) = 0$

  * $V(y_1, y_2) > 0, \forall (y_1, y_2) \neq (0,0)$
    mindestens in einer Kreisscheibe um (0,0).

  * $< (\operatorname{grad} V)^T, \boldsymbol{f} \; > \leq \; 0.$

Passende Aufgabe: Blatt 5, H3

- Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2y' + y = 0$$

  - Allgemeine Lösung für homogene Gleichung
  - Partikuläre Lösung für inhomogenes Problem: spezielle Ansätze
  - Wer spezielle Ansätze nicht mag/kann, muss Matrixschreibweise und Variation der Konstanten können

Passende Aufgaben: Blatt 4, P2, H3

- Randwertaufgaben: fielen der verkürzten Vorlesungszeit zum Opfer!

  Stichworte zum erkennen in alten Klausuren:

  Matrixschreibweise,
  Für welche Randwerte gibt es eindeutige Lösung
  Regularität der Shootingmatrix

- Variationsrechnung: fiel der verkürzten Vorlesungszeit zum Opfer!

  Stichworte zum erkennen in alten Klausuren:

  Euler-Lagrange-Gleichung
  Natürliche Randbedingung
  Lösen der entstehenden Randwertaufgabe

- Laplace-Transformation. fiel der verkürzten Vorlesungszeit zum Opfer!

- **Blatt 1:**
  - Aufgabe: Modellierung, Lösung bei gegebenem Ansatz verifizieren/finden. ∅

- **Blätter 2:**

  erkl. SoSe!

  - Aufgabe B2-P1: separierbare Differentialgleichungen , Anfangswerte X
  - Aufgabe B2-P2: lineare Differentialgleichungen , X
    spezielle Ansätze für inhomogene lineare Dgl., Variation der Konstanten
  - Aufgabe <u>B2-H1: 1a</u>: Nachweis Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $\longrightarrow$ Lineare Differentialgleichung ∅
  - Aufgabe B2-H1: 1b: Lösen Ähnlichkeitsdifferentialgleichung mit Hilfe der Substitution aus a), Zugehörige Anfangswertaufgabe
  - Aufgabe B2-H1: 1c: Lösung aus b) durch Einsetzen überprüfen.
  - Aufgabe B2-H2: <u>Typ erkennen, geeignete Substitution und neue Differentialgleichung angeben</u>

- **Blätter 3:**

  - Aufgabe B3-P1: Auf Exaktheit prüfen
    Gegebenenfalls Potential bestimmen und lösen ×××

  - Aufgabe B3-P2-a: Spezielle Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung
    (nichtlinear oder nicht konstante Koeffizienten) $\emptyset$
  - Aufgabe B3-P2-b: Randwertaufgaben zu Differentialgleichung aus 1a)
    Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen $\emptyset$
  - Aufgabe B3-H1-a: Spezielle Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\emptyset$
    (nichtlinear oder nicht konstante Koeffizienten)

  - Aufgabe B3-H2: Bernoullische Differentialgleichung
    a) Erkennen, Substituieren, Lösen der Differentialgleichung ×××
    Anfangswertaufgabe lösen
    b, c) Existenz und Eindeutigkeit $\emptyset$

- **Blätter 4:**

  - Aufgabe B4-P1: Lineares 2x2 System, konstante Koeffizienten, homogen, reelles Fundamentalsystem bestimmen XXX
    Nötig: Eigenwerte, komplexe Eigenwerte, Eigenvektoten, Hauptvektoren

  - Aufgabe B4-P2: Lineares Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten z.B. $y'' + 2y' + y = \cos(t)$ X evtl. SoSe
    inhomogen, Umschreiben auf System, Variation der Konstanten

  - Aufgabe B4-H1: Lineares System, nicht konstante Koeffizienten, Fundamentalsystem überprüfen, Variation der Konstanten, Anfangswertaufgabe X

  - Aufgabe B4-H2: Lineares 2x2 System, konstante Koeffizienten, inhomogen, komplexe Eigenwerte, gesucht reelles Fundamentalsystem
    Spezieller Ansatz für $\boldsymbol{y}_p$.
    XXX

- **Blatt 5:**
  - Aufgabe B5-P1: Stabilität lineares System, Ruhelage $\mathbf{0}$, System 2x2 bzw. 3x3 Parameterabhängig   x x x
  - Aufgabe B5-P2: Stabilität nicht linear, Jacobi-Matrix untersuchen   x
  - Aufgabe B5-H1: Stabilität lineares System, 3x3, Parameterabhängig   x x x
  - Aufgabe B5-H2: Stabilität nicht linear, Jacobi-Matrix untersuchen   x
  - Aufgabe B5-H3: System nicht linear, Ljapunov