Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Man berechne die allgemeine reelle Lösung für $y''' - y'' - 15y' - 25y = 0$.

b) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' + y' - 20y = (36x - 23)e^{4x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = 0$$

mit Hilfe

(i) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und

(ii) der Laplace-Transformation.

Lösung:

a) $y''' - y'' - 15y' - 25y = 0 \quad \Rightarrow$
$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 15\lambda - 25 = (\lambda - 5)((\lambda + 2)^2 + 1) = 0$
Die Nullstellen $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -2 + i$, $\lambda_3 = -2 - i$ liefern das komplexe Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^{5x}\,,\ \tilde{y}_2(x) = e^{(-2+i)x}\,,\ \tilde{y}_3(x) = e^{(-2-i)x}\,.$$

Zerlegung der komplexen Lösungen in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-2+i)x} = \underbrace{e^{-2x}\cos(x)}_{=:y_2(x)} + i\,\underbrace{e^{-2x}\sin(x)}_{=:y_3(x)} = \overline{\tilde{y}_3(x)}\,.$$

Die allgemeine reelle Lösung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}\cos(x) + c_3 e^{-2x}\sin(x) \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R}\,.$$

b) (i) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung
$y'' + y' - 20y = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 20 = (\lambda - 4)(\lambda + 5) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = 4\,, \lambda_2 = -5$ liefern das Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^{4x}\,,\; y_2(x) = e^{-5x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Da $\lambda_1 = 4$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der spezielle Ansatz für die Inhomogenität

$$y_p(x) = (ax + b)xe^{4x}\,.$$

Die Ableitungen lauten:

$$y_p'(x) = (4ax^2+(2a+4b)x+b)e^{4x}, \quad y_p''(x) = 2(8ax^2+(8a+8b)x+a+4b)e^{4x}.$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$2(8ax^2+(8a+8b)x+a+4b)e^{4x}+(4ax^2+(2a+4b)x+b)e^{4x}-20(ax^2+bx)e^{4x}$$
$$= (18ax + 2a + 9b)e^{4x} \stackrel{!}{=} (36x - 23)e^{4x}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a = 2\,,\; b = -3$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x} + (2x^2 - 3x)e^{4x}\,.$$

c_1 und c_2 werden aus den Anfangsbedingungen berechnet. Mit der Ableitung

$$y'(x) = 4c_1 e^{4x} - 5c_2 e^{-5x} + (4x - 3 + 4(2x^2 - 3x))e^{4x}\,,$$

erhält man

$$3 = y(0) = c_1 + c_2\,, \quad 0 = y'(0) = 4c_1 - 5c_2 - 3\,.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man $c_1 = 2\,,\; c_2 = 1$ und damit die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y(x) = 2e^{4x} + e^{-5x} + (2x^2 - 3x)e^{4x}\,.$$

(ii) Die Laplace-Transformierte von $y(x)$ sei $Y(s)$, damit lautet die transformierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{36}{(s-4)^2} - \frac{23}{s-4} &= s^2Y(s) - sy(0+) - y'(0+) + (sY(s) - y(0+)) - 20Y(s) \\
&= Y(s)(s^2 + s - 20) - 3s - 3 \\
\Rightarrow \quad Y(s) &= \frac{1}{(s-4)(s+5)}\left(3s + 3 + \frac{36}{(s-4)^2} - \frac{23}{s-4}\right) \\
&= \frac{(3s+3)(s-4)^2 + 36 - 23(s-4)}{(s-4)^3(s+5)} = \frac{3s^3 - 21s^2 + s + 176}{(s-4)^3(s+5)} \\
&\stackrel{PBZ}{=} \frac{2}{s-4} - \frac{3}{(s-4)^2} + \frac{4}{(s-4)^3} + \frac{1}{s+5} \\
\Rightarrow \quad y(x) &= 2e^{4x} - 3xe^{4x} + 2x^2e^{4x} + e^{-5x}
\end{aligned}$$

Aufgabe 22:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u' &= 2u + v\,, \quad u(0) = 5 \\ v' &= 2v - u\,, \quad v(0) = 1 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung:

Die Laplace-Transformierten von $u(x)$ und $v(x)$ seien $U(s)$ und $V(s)$. Damit lautet das transformierte Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} sU(s) - u(0+) &= 2U(s) + V(s) \\ sV(s) - v(0+) &= -U(s) + 2V(s) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 1 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2+1} \begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(s) = \frac{5(s-2)+1}{(s-2)^2+1} = 5\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

$$V(s) = \frac{s-2-5}{(s-2)^2+1} = \frac{s-2}{(s-2)^2+1} - 5\frac{1}{(s-2)^2+1} \;.$$

Durch Rücktransformation erhält man die Lösungen der Anfangswertaufgabe:

$$u(x) = 5e^{2x}\cos x + e^{2x}\sin x\,, \quad v(x) = e^{2x}\cos x - 5e^{2x}\sin x\;.$$

Hätte man das System $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

mit e-Funktionsansatz gelöst (war hier nicht verlangt), so hätte man das Eigensystem $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$ und $\boldsymbol{v}_1 = (1,i)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-i)^T$ und die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= d_1 e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + d_2 e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(d_1+d_2)}_{=c_1} e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \underbrace{i(d_1-d_2)}_{=c_2} e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten. Über die Anfangsbedingungen $(5,1) = (u(0), v(0)) = (c_1, c_2)$ hätte man natürlich die gleiche Lösung erhalten.

Aufgabe 23:

Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $\begin{aligned} \dot{x} &= y - x/2 - 1, \\ \dot{y} &= -x - y/2 + 3, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \dot{x} &= 9x + 2y + 24, \\ \dot{y} &= 2x + 6y + 22. \end{aligned}$

Lösung:

Für einen Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^*$ gilt $(\boldsymbol{y}^*)' = \boldsymbol{0}$. Er berechnet sich also aus $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ und löst somit das inhomogene System $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$.

Durch die Verschiebung $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*$ entspricht dem Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^*$ des inhomogenen Systems der Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ des homogenen Systems $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{z}$. Die Klassifikation erfolgt also über die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

a) (i) Berechnung des Gleichgewichtspunktes $\boldsymbol{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\det \begin{pmatrix} -1/2 - \lambda & 1 \\ -1 & -1/2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1/2)^2 + 1 = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1/2 + i\,,\ \lambda_2 = -1/2 - i$

Wegen $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ und $\mathrm{Re}\,(\lambda_{1,2}) = -1/2 < 0$ ist $\boldsymbol{y}^*$ ein asymptotisch stabiler Strudelpunkt.

(iii) Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1/2 - \lambda_1 & 1 \\ -1 & -1/2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \ \to \ \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = (1, i)^T \ \Rightarrow \ \boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1 = (1, -i)^T.$$

Für die allgemeine reelle Lösung benötigt man

$$e^{\lambda_1 t}\,\boldsymbol{v}_1 = e^{-t/2}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine reelle Lösung des autonomen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

b) (i) Berechnung des Gleichgewichtspunktes $\boldsymbol{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

(ii)

$$\det \begin{pmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 10\,,\ \lambda_2 = 5$

Da $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, ist $\boldsymbol{y}^*$ ein instabiler Knotenpunkt 2.Art.

(iii) Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 9-\lambda_1 & 2 \\ 2 & 6-\lambda_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \ \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 9-\lambda_2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \ \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Damit erhält man die allgemeine reelle Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + c_1 e^{10t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

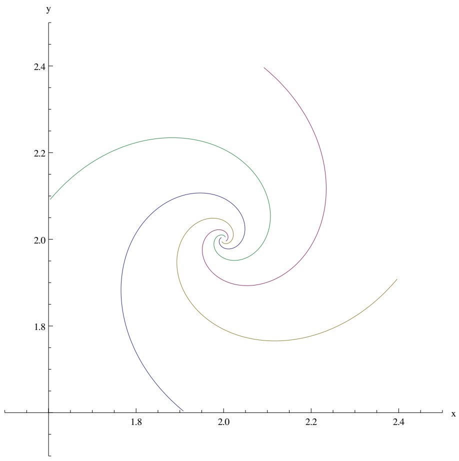

Bild 23 a) asymptotisch stabiler Strudelpunkt $\boldsymbol{y}^* = (2,2)^T$

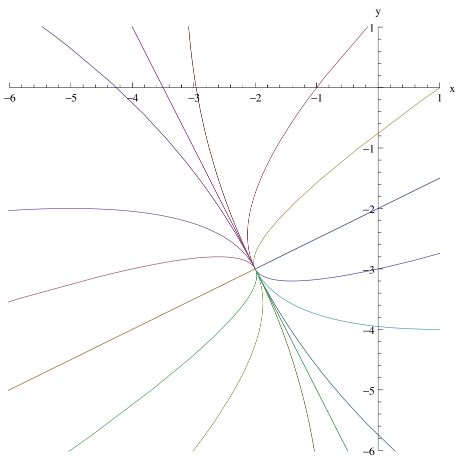

Bild 23 b) instabiler Knotenpunkt 2.Art $\boldsymbol{y}^* = (-2,-3)^T$

Aufgabe 24:

Man bestimme alle stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) der Differentialgleichungssysteme

a) $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= (y_1 - 1)(y_2 - 3)\,, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - xy \\ \dot{y} &= x - xy\,. \end{aligned}$$

und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Lösung:

a) Die stationären Punkte ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ (y_1 - 1)(y_2 - 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der 1. Gleichung folgt $y_1 = y_2$.

Aus der 2. Gleichung folgt $y_1 = 1$ oder $y_2 = 3$.

Also lauten die stationären Punkte

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ (y_1 - 1)(y_2 - 3) \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y_2 - 3 & y_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Zur Klassifikation von $\boldsymbol{P}_1$:

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = -(1-\lambda)\lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Die Eigenwerte lauten $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

Damit ist $\boldsymbol{P}_1$ ein lokal instabiler Sattelpunkt.

Zur Klassifikation von $\boldsymbol{P}_2$:

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

Die Eigenwerte lauten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Damit ist $\boldsymbol{P}_2$ ein lokal instabiler Knotenpunkt 2. Art.

b) Die Gleichgewichtspunkte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} 0 &= 2y - xy = y(2 - x)\,, \\ 0 &= x - xy = x(1 - y)\,. \end{aligned}$$

Durch Fallunterscheidungen in der ersten Gleichung erhält man die beiden Gleichgewichtspunkte

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - xy \\ x - xy \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y & 2-x \\ 1-y & -x \end{pmatrix}$$

Klassifikation über die Eigenwerte von $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{P}_i)$:

$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2} < 0 < \lambda_2 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P}_1$ ist ein (lokal) instabiler Sattelpunkt

$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}\,(2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1 < 0\,,\ \lambda_2 = -2 < 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{P}_2$ ist ein (lokal) asymptotisch stabiler Knotenpunkt 2.Art

Abgabetermin: 20.1. - 24.1.2020 (zu Beginn der Übung)