Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Man berechne für die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) die allgemeine Lösung des homogenen Systems,

(ii) eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems
(Tipp: $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$),

(iii) und die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + e^{-x} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems eignet sich hier der Ansatz $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{-x}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

a) (i) Charakteristisches Polynom:
$p(\lambda) = (-2-\lambda)(-4-\lambda) - 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 - 3 = (\lambda+1)(\lambda+5) = 0 \quad \Rightarrow$
Eigenwerte: $\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = -5$
Eigenvektoren:
zu $\lambda_1 = -1$: $\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
zu $\lambda_2 = -5$: $\left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(ii) $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{a}$ eingesetzt in die inhomogene Gleichung ergibt:

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{a} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -5/2 & -5/2 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Mit der Anfangsvorgabe erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet $\quad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) Berechnung der Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i\,.$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = i \;:\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 0 \\ -2 & -1-i & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt $\lambda_2 = -i = \bar{\lambda}_1$ und $\boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in komplexer Darstellung mit $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{y}\,(x) = d_1 e^{ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} + d_2 e^{-ix} \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}\,.$$

Für die allgemeine reelle Lösung muss $e^{\lambda_1 x}\,\boldsymbol{v}_1 = e^{\bar{\lambda}_2 x}\,\bar{\boldsymbol{v}}_2$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 &= e^{ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = (\cos x + i \sin x)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x + \cos x \\ -2 \sin x \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet:

$$\boldsymbol{y}_h(x) \;=\; c_1 \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x + \cos x \\ -2\sin x \end{pmatrix}\,.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man hier über einen Ansatz der Form $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{-x}\mathbf{c}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\boldsymbol{y}'_p = -e^{-x}\mathbf{c} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{c} + e^{-x}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$\boldsymbol{y}(x) \;=\; c_1 \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x + \cos x \\ -2\sin x \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 18:

Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \ .$$

Lösung:

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -3-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (1-\lambda)(\lambda+2)^2 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = -2 \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da $1 = g(\lambda_{2,3}) < a(\lambda_{2,3}) = 2$ gilt, ist ein Hauptvektor 1. Stufe über den Ansatz $(\boldsymbol{A} - \lambda_{2,3}\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{v}^3 = \boldsymbol{v}^2$ zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$\boldsymbol{y}^1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^2(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^3(x) = e^{-2x} \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 19:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{10}{x^2}y = 0.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren und gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$.

Lösung:

Die Koeffizienten der polynomialen Lösung $u(x) = ax^2 + bx + c$ ergeben sich durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a - \frac{6(2ax+b)}{x} + \frac{10(ax^2+bx+c)}{x^2} \quad \Rightarrow \\ 0 &= 2ax^2 - 6x(2ax+b) + 10(ax^2+bx+c) \\ &= x^2(2a - 12a + 10a) + x(-6b + 10b) + 10c \\ &= 4bx + 10c \ \Rightarrow\ b = c = 0\,,\ a \in \mathbb{R}\,,\ \text{wähle z.B. } a = 1, \ \text{ also } u(x) = x^2 \end{aligned}$$

Reduktionsansatz für eine weitere linear unabhängige Lösung:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x)\,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= u''z + 2u'z' + uz'' - \frac{6}{x}(u'z + uz') + \frac{10}{x^2}uz \\ &= uz'' + (2u' - \frac{6u}{x})z' + (\underbrace{u'' - \frac{6}{x}u' + \frac{10}{x^2}u}_{=0})z \\ &= x^2z'' + (4x - 6x)z' \ = \ x^2w' - 2xw \qquad \text{mit } w = z'. \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung $x^2w' - 2xw = 0$ wird durch Separation gelöst:

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad w(x) = x^2 = z'(x) \quad \Rightarrow \quad z(x) = \frac{x^3}{3}\,.$$

Die weitere linear unabhängige Lösung aus dem Reduktionsansatz lautet daher:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x) = x^2 \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^5}{3}\,.$$

Als Fundamentalsystem kann also $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^5$ gewählt werden.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^5.$$

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 6y = 6x^2 - 20x + 7\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung

   (i) der Variation der Konstanten und

   (ii) der Methode der Greenschen Funktion.

Lösung:

a) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + y' - 6y = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = -3\,, \lambda_2 = 2$ liefern das Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^{-3x}\;,\; y_2(x) = e^{2x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Für die polynomiale Inhomogenität kann hier der Ansatz

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

verwendet werden. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$2a + 2ax + b - 6(ax^2 + bx + c) = -6ax^2 + (-6b + 2a)x - 6c + b + 2a \stackrel{!}{=} 6x^2 - 20x + 7\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a = -1\,,\; b = 3\,,\; c = -1\,.$ Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - x^2 + 3x - 1\,.$$

b)

$$y'' + y' - 6y = 6x^2 - 20x + 7 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6x^2 - 20x + 7 \end{pmatrix}$$

Würde man das homogene System lösen, käme man auf das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$, also auf die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = (1, -3)^T$ und $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2)^T$ und erhielte damit das Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} .$$

Da wir aus a) für das System die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

schon kennen, verzichten wir hier auf die Berechnung des Eigensystems.

(i) Der Ansatz der Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung führt auf das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6x^2 - 20x + 7 \end{pmatrix} .$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-3x} & e^{2x} & 0 \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} & 6x^2 - 20x + 7 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} e^{-3x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & 5e^{2x} & 6x^2 - 20x + 7 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(6x^2 - 20x + 7)e^{3x}/5 \\ (6x^2 - 20x + 7)e^{-2x}/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2x^2 - 8x + 5)e^{3x}/5 \\ (-3x^2 + 7x)e^{-2x}/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(2x^2 - 8x + 5)e^{3x}/5 \\ (-3x^2 + 7x)e^{-2x}/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^2 + 3x - 1 \\ -2x + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Die Greensche Funktion des Grundlösungsverfahrens wird bestimmt über die Lösung $w(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}(0)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = -\frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} \quad \Rightarrow \quad G(x,\tau) = -\frac{1}{5}e^{-3(x-\tau)} + \frac{1}{5}e^{2(x-\tau)}$$

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int_0^x G(x,\tau)h(\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^x \left(-\frac{1}{5}e^{-3(x-\tau)} + \frac{1}{5}e^{2(x-\tau)}\right)(6\tau^2 - 20\tau + 7)\,d\tau \\
&= \frac{1}{5}\left(-e^{-3x}\int_0^x e^{3\tau}(6\tau^2 - 20\tau + 7)\,d\tau + e^{2x}\int_0^x e^{-2\tau}(6\tau^2 - 20\tau + 7)\,d\tau\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(e^{-3x}\left((-2\tau^2 + 8\tau - 5)e^{3\tau}\right)\Big|_0^x + e^{2x}\left((-3\tau^2 + 7\tau)e^{-2\tau}\right)\Big|_0^x\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(e^{-3x}\left((-2x^2 + 8x - 5)e^{3x} + 5\right) + e^{2x}\left((-3x^2 + 7x)e^{-2x}\right)\right) \\
&= -x^2 + 3x - 1 + e^{-3x}
\end{aligned}$$

Erwartungsgemäß stimmt die erste Komponente der allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 + 3x - 1 \\ -2x + 3 \end{pmatrix}$$

mit der aus a) überein und die zweite mit deren Ableitung.

Abgabetermin: 6.1. - 10.1.2020 (zu Beginn der Übung)