

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Lösungen zu Blatt 4

#### Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y + 3x, \quad y(0) = 1.$$

- Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit  $h = 0.1$  eine Näherung für  $y(0.5)$ .
- Man führe 4 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne  $y^{[4]}(0.5)$  als Näherung für  $y(0.5)$ .
- Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne  $y(0.5)$ .
- Man gebe von der Potenzreihe von  $y(x)$  zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  den Abschnitt bis zur Ordnung 4 an, vergleiche diesen mit  $y^{[0]}(x)$  bis  $y^{[4]}(x)$  aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall  $[0, 0.5]$ .

#### Lösung:

a)  $y' = 2y + 3x =: f(x, y)$

Eulerschen-Polygonzug-Verfahren mit Startwert  $y(0) = y_0 = 1$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + h(2y_k + 3x_k)$$

$$\begin{aligned} x_0 = 0.0 & \quad y_0 = 1.00000 \\ x_1 = 0.1 & \quad y_1 = 1.20000 \\ x_2 = 0.2 & \quad y_2 = 1.47000 \\ x_3 = 0.3 & \quad y_3 = 1.82400 \\ x_4 = 0.4 & \quad y_4 = 2.27880 \\ x_5 = 0.5 & \quad y_5 = 2.85456 \approx y(0.5) \end{aligned}$$

b) Verfahren der sukzessiven Approximation mit Startwert  $y^{[0]}(x) = y_0$

$$y^{[k+1]}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y^{[k]}(t)) dt = 1 + \int_0^x 2y^{[k]}(t) + 3t dt$$

$$y^{[1]}(x) = 1 + \int_0^x 2 + 3t dt = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2$$

$$y^{[2]}(x) = 1 + \int_0^x 2\left(1 + 2t + \frac{3}{2}t^2\right) + 3t dt = 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + x^3$$

$$\begin{aligned} y^{[3]}(x) &= 1 + \int_0^x 2\left(1 + 2t + \frac{7}{2}t^2 + t^3\right) + 3t dt \\ &= 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{[4]}(x) &= 1 + \int_0^x 2\left(1 + 2t + \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right) + 3t dt \\ &= 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \end{aligned}$$

$$y^{[4]}(0.5) = 3.24583333 \approx y(0.5)$$

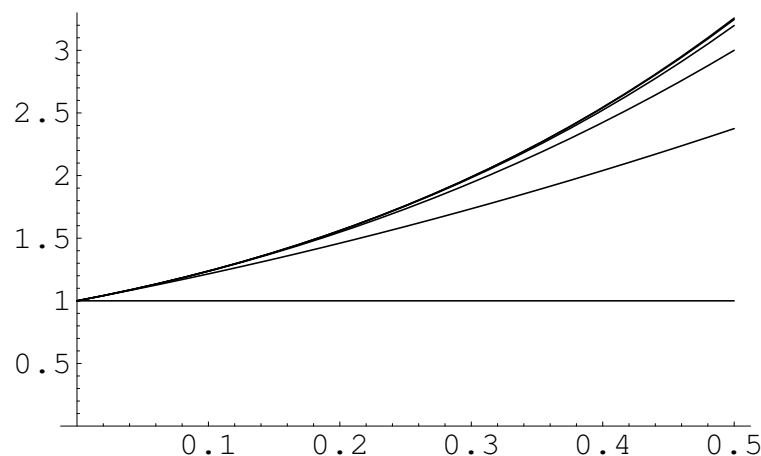
c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y' = 2y + 3x$  lautet

$$y(x) = ce^{2x} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$$

Mit  $y(0) = 1$  erhält man die Lösung der Anfangswertaufgabe und den Funktionswert an der Stelle  $x = 0.5$

$$y(x) = \frac{7}{4}e^{2x} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \Rightarrow y(0.5) = \frac{7e - 6}{4} = 3.25699\dots$$

d) 
$$y(x) = \frac{7}{4}e^{2x} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = 1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{7}{4} \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$$



**Bild 13**  $y(x), y^{[0]}(x), \dots, y^{[4]}(x)$

**Aufgabe 14:**

- a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' + 2y + \sqrt{y} = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$$

- b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall  $[0, \log(2)]$  eindeutig bestimmt ist.
- c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall  $[0, b]$  mit  $b > \log(2)$  nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

**Lösung:**

- a) Bei
- $y' + 2y + \sqrt{y} = 0$
- handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung mit
- $\alpha = \frac{1}{2}$
- , daher führt die Substitution
- $u = y^{1-\alpha} = y^{1/2}$
- auf:

$$u' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y' = \frac{1}{2}y^{-1/2}(-2y - y^{1/2}) = \frac{1}{2}(-2y^{1/2} - 1) = -u - \frac{1}{2},$$

mit der allgemeinen Lösung  $u(t) = ce^{-t} - \frac{1}{2}$ .

Eine Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich damit durch:

$$y(t) = u^2(t) = \left(ce^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = y(0) = \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow c = 1,$$

der Fall  $c = 0$ , d.h.  $y(t) = \frac{1}{4}$ , löst nicht die Differentialgleichung.

Eine Lösung lautet also  $y(t) = \left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2$ .

- b) Für alle
- $t \in \mathbb{R}$
- gilt
- $y(t) \geq 0$
- .

$$0 = y(t) = \left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log(2) \Rightarrow$$

$y(t) > 0$  für  $t \in [0, \log(2)[$ .

Die Eindeutigkeit der Lösung im Intervall  $[0, \log(2)]$  wird nun über den Satz von Picard und Lindelöf nachgewiesen.

$$y' + 2y + \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y'(t) = -2y(t) - \sqrt{y(t)} =: f(t, y)$$

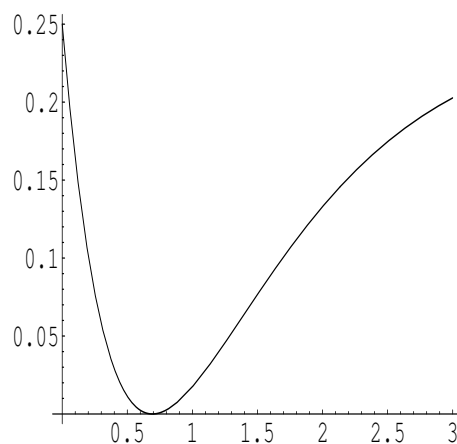
Wegen  $f_y(t, y) = -2 - \frac{1}{2\sqrt{y}}$  ist  $f$  eine  $C^1$ -Funktion und lipschitzstetig bzgl. der  $y$ -Koordinate im Quader  $[a, b] \times [c, d]$  mit  $0 \leq a < b < \log(2)$  und  $0 < c < d$ .

Als Lipschitzkonstante  $L$  kann

$$|f_y(t, y)| = \left| -2 - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \left| 2 + \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \leq 2 + \frac{1}{2\sqrt{c}} =: L$$

gewählt werden. Damit ist die Lösung  $y(t)$  eindeutig bestimmt im Intervall  $[a, b]$  und damit auch in  $[0, \log(2)]$ .

- c) Nach a) löst  $y_1(t) = \left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2$  die Anfangswertaufgabe im Intervall  $[0, b]$  mit  $b \in \mathbb{R}$ .



**Bild 14**  $y_1(t) = \left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2$

Da  $y_1(\log(2)) = 0$  gilt, folgt aus der Differentialgleichung

$$y_1'(\log(2)) = -2y_1(\log(2)) - \sqrt{y_1(\log(2))} = 0.$$

Außerdem löst  $y^* \equiv 0$  die Differentialgleichung. Daher ist

$$y_2(t) := \begin{cases} \left(e^{-t} - \frac{1}{2}\right)^2 & , 0 \leq t \leq \log(2) \\ 0 & \log(2) < t \leq b \end{cases}$$

eine  $C^1$ -Funktion auf  $[0, b]$ , die ebenfalls die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung erfüllt, also Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

**Aufgabe 15:**

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für  $t \neq 0$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/t^2 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}.$$

b) Bilden  $\mathbf{y}^1(t)$  und  $\mathbf{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

**Lösung:**

a) Die Lösung in Polynomform

$$\mathbf{y}^1(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}.$$

wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die Unbekannten  $a_0, \dots, b_3$  werden über Koeffizientenvergleich bestimmt:

1. Gleichung:

$$y_1'(t) = y_2(t)$$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$\Rightarrow b_0 = a_1, \quad b_1 = 2a_2, \quad b_2 = 3a_3, \quad b_3 = 0$$

$$\Rightarrow y_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad y_2(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

2. Gleichung:

$$y_2'(t) = 3y_1(t)/t^2 + y_2(t)/t$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 t = 3(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)/t^2 + (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)/t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2a_2 t^2 + 6a_3 t^3 &= 3a_0 + (3a_1 + a_1)t + (3a_2 + 2a_2)t^2 + (3a_3 + 3a_3)t^3 \\ &= 3a_0 + 4a_1 t + 5a_2 t^2 + 6a_3 t^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 \in \mathbb{R}$$

Für  $a_3 = 1$  erhält man damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

b)  $\mathbf{y}^2(t)$  löst die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/t^2 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/t^2 \\ 2/t^3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen  $\mathbf{y}^1(t)$  und  $\mathbf{y}^2(t)$  sind linear unabhängig, denn für die Matrix  $\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t) | \mathbf{y}^2(t))$  gilt für die Wronski-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} t^3 & 1/t \\ 3t^2 & -1/t^2 \end{pmatrix} = -4t \neq 0 \quad \text{für } t \neq 0.$$

Damit ist  $\mathbf{Y}(t)$  Fundamentalmatrix.

c) Mit  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}$ .

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich aus

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{Y}(1) \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 16:**

Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2 \\ 0 & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Variation der Konstanten.

**Lösung:**

Zunächst wird die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems berechnet. Das System kann von unten nach oben aufgelöst werden, da die Systemmatrix obere Dreiecksform besitzt. Für die zweite Gleichung ergibt sich durch Separation

$$y_2' = \frac{2y_2}{x} \Rightarrow \int \frac{dy_2}{y_2} = 2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log |y_2| = 2 \log |x| + k_2 \Rightarrow y_2 = c_2 x^2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$y_1' = \frac{1}{x} y_1 + 2y_2 = \frac{y_1}{x} + 2c_2 x^2$$

eine lineare inhomogene Differentialgleichung in  $y_1$ .

Die lineare homogene Differentialgleichung in  $y_1$  wird durch Separation gelöst

$$y_1' = \frac{y_1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy_1}{y_1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log |y_1| = \log |x| + k_1 \Rightarrow y_{1h} = c_1 x, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Die lineare inhomogene Differentialgleichung in  $y_1$  wird mit Variation der Konstanten über den Ansatz  $y_{1p}(x) = k(x)x$  gelöst

$$\Rightarrow k'(x)x = 2c_2 x^2 \Rightarrow k'(x) = 2c_2 x \Rightarrow k(x) = c_2 x^2 \Rightarrow y_{1p}(x) = c_2 x^3.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung der 1. Gleichung

$$y_1(x) = y_{1h}(x) + y_{1p}(x) = c_1 x + c_2 x^3.$$

Die allgemeine Lösung  $\mathbf{y}_h$  des homogenen Systems lautet also

$$\mathbf{y}_h(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x + c_2 x^3 \\ c_2 x^2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & x^3 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{Y}(x)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit der Fundamentalmatrix  $\mathbf{Y}(x)$ . Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich durch Variation der Konstanten  $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x)$

$$\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} x & x^3 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x)x + c_2'(x)x^3 \\ c_2'(x)x^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow c_2'(x)x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow c_1'(x)x + c_2'(x)x^3 = c_1'(x)x - x = -x \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = 0.$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{x}, \quad c_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x & x^3 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems lautet also

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = c_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}.$$

**Abgabetermin:** 9.12. - 13.12.2019 (zu Beginn der Übung)