Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y + 3x\ , \quad y(0) = 1\ .$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

b) Man führe 4 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[4]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 4 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[4]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 14:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' + 2y + \sqrt{y} = 0\ , \quad y(0) = \frac{1}{4}\ .$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, \ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > \ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 15:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/t^2 & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}.$$

b) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 16:

Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2 \\ 0 & \frac{2}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Abgabetermin: 9.12. - 13.12.2019 (zu Beginn der Übung)