Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$\frac{e^x}{x} + 2y^3 + \left(3xy^2 + \frac{\sin y}{x} + \frac{y\cos y}{x}\right) y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(x)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Lösung:

Die Differentialgleichung

$$\underbrace{\frac{e^x}{x} + 2y^3}_{=g(x,y)} + \underbrace{\left(3xy^2 + \frac{\sin y}{x} + \frac{y\cos y}{x}\right)}_{=h(x,y)} y' = 0$$

ist nicht exakt, denn $g_y = 6y^2 \neq 3y^2 - \dfrac{\sin y}{x^2} - \dfrac{y\cos y}{x^2} = h_x$.

Die notwendige Bedingung für den integrierenden Faktor der Form $m = m(x)$ ergibt sich aus der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x}(m(x) \cdot h(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(m(x) \cdot g(x,y)) \, .$$

Nach der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(m(x)\cdot h(x,y)) &= m'(x)h(x,y)+m(x)\cdot h_x(x,y)\\ &= m'(x)\left(3xy^2+\frac{\sin y}{x}+\frac{y\cos y}{x}\right)\\ &\quad +m(x)\left(3y^2-\frac{\sin y}{x^2}-\frac{y\cos y}{x^2}\right)\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x)\cdot g(x,y)) = m(x)\cdot g_y(x,y)=6y^2m(x)$$

Für die Exaktheit der mit $m(x)$ multiplizierten Differentialgleichung muss also gelten

$$\Rightarrow\quad m'(x)\left(3xy^2+\frac{\sin y}{x}+\frac{y\cos y}{x}\right)+m(x)\left(3y^2-\frac{\sin y}{x^2}-\frac{y\cos y}{x^2}\right)=6y^2m(x)$$

$$\Rightarrow\quad m'(x)\left(3xy^2+\frac{\sin y}{x}+\frac{y\cos y}{x}\right)=m(x)\frac{1}{x}\left(3xy^2+\frac{\sin y}{x}+\frac{y\cos y}{x}\right)$$

Man erhält eine gewöhnliche Diffentialgleichung für $m(x)$:

$$m'(x)=\underbrace{\frac{1}{x}}_{=a}\,m(x)\,.$$

Kann $a=a(x,y)$ nicht in $a=a(x)$ überführt werden, lässt sich kein integrierender Faktor in der Form $m(x,y)=m(x)$ finden.

Die Differentialgleichung in m wird z.B. durch $m(x)=x$ gelöst. Multiplikation der Ausgangsgleichung mit m ergibt die exakte Differentialgleichung

$$e^x+2xy^3+\left(3x^2y^2+\sin y+y\cos y\right)y'=0$$

Berechnung des zugehörigen Potentials $\phi(x,y)$:

$$\phi_x=e^x+2xy^3\ \Rightarrow\quad \phi(x,y)=e^x+x^2y^3+\varphi(y)\ \Rightarrow\quad \phi_y(x,y)=3x^2y^2+\varphi'(y)\,.$$

Vergleich mit $\phi_y(x,y)=3x^2y^2+\sin y+y\cos y$ ergibt $\varphi'(y)=\sin y+y\cos y$ also $\varphi(y)=y\sin y+c_1$ mit $c_1\in\mathbb{R}$.

Setzt man dies oben ein, so folgt $\phi(x,y)=e^x+x^2y^3+y\sin y+c_1$.

Die implizite Lösungsdarsstellung lautet

$$e^x+x^2y^3+y\sin y=c\,.$$

Aufgabe 10:

Man löse folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - 2yy' = 0.$$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist autonom

$$y'' - 2yy' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = 2yy' = f(y, y').$$

Angenommen zu $y(x)$ existiert eine Umkehrfunktion $x(y)$.

Setze $v(y) = y'(x(y))$. Aus

$$f(y, y') = y''(x) = (v(y(x)))' = v'(y)y'(x) = v'v$$

ergibt sich dann

$$v'(y) = \frac{f(y, v)}{v} = \frac{2yv}{v} = 2y \Rightarrow v(y) = y'(x) = y^2 + \tilde{c}\,.$$

Trennung der Variablen ergibt

$$y'/(y^2 + \tilde{c}) = 1\,.$$

Mit einer Fallunterscheidung erhält man dann

a) $0 < \tilde{c} =: c^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2 + c^2}\,dx = \int 1\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{c}\arctan(y/c) = x + \tilde{d} \Rightarrow y(x) = c\tan(cx + d)$

b) $0 = \tilde{c} \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int 1\,dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x + d \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x + d}$

c) $0 > \tilde{c} =: -c^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2 - c^2}\,dx = \frac{1}{2c}\int \frac{1}{y - c} - \frac{1}{y + c}\,dy = \int 1\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2c}\left(\log|y - c| - \log|y + c|\right) = \frac{1}{2c}\log\left|\frac{y - c}{y + c}\right| = x + \tilde{d}$

$\Rightarrow y(x) = -c\frac{\pm e^{2cx+d} + 1}{\pm e^{2cx+d} - 1}$

Aufgabe 11:

Man löse folgende Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{a)}\ y'' - 4y \;=\; 0\,, \qquad \text{b)}\ xy'' - 3y' + 2x \;=\; 0\,.$$

Lösung:

a) Die Differentialgleichung ist autonom und hängt nicht von y' ab. Man multipliziert die Gleichung $y'' - 4y = 0$ mit y' und integriert anschließend nach x (beachte $dy' = y''dx$):

$$y''y' = 4yy' \;\Rightarrow\; \int y'dy' = \int y''y'\,dx = 4\int yy'dx = 4\int y\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y')^2 = 2y^2 + c.$$

Für $c = 0$ erhält man:

$$y' = \pm 2y \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{y}\,dx \;=\; \pm 2\int dx \;\Rightarrow\; \log|y| = \pm 2x + \tilde{c}_{1,2}$$

$$\Rightarrow\; y_1(x) = C_1 e^{2x}\,,\; y_2(x) = C_2 e^{-2x}$$

Da die Differentialgleichung linear ist, bilden e^{2x} und e^{-2x} schon ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung lautet damit

$$y \;=\; C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}\,.$$

Eine weitere Fallunterscheidung ist daher nicht erforderlich.

b) Die Differentialgleichung hängt nicht explizit von y ab:

$$xy'' - 3y' + 2x \;=\; 0.$$

Man setzt $y' = z$ und erhält die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$xz' - 3z + 2x \;=\; 0\,.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $xz' - 3z \;=\; 0$:

$$\frac{z'}{z} \;=\; \frac{3}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dz}{z} \;=\; 3\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \log|z| = 3\log|x| + \tilde{c} \;\Rightarrow\; z = cx^3.$$

Variation der Konstanten für die inhomogene Gleichung: $z_p(x) = c(x)x^3$

$$\Rightarrow\; x(c'x^3 + c3x^2) - 3cx^3 + 2x = 0 \;\Rightarrow\; c' = -\frac{2}{x^3} \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; z_p = x$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z = cx^3 + x.$$

Wegen $z = y'$ muß nochmals integriert werden und man erhält

$$y = Cx^4 + D + \frac{x^2}{2}\,.$$

Aufgabe 12:

Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben und bestimme den Bereich, in dem die Lösungen existieren

a) $y' = x^3 y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 4\,,$

b) $y' = y^2 + 1 \quad \text{mit} \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,,$

c) $y' - y + e^x y^2 = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,.$

Lösung:

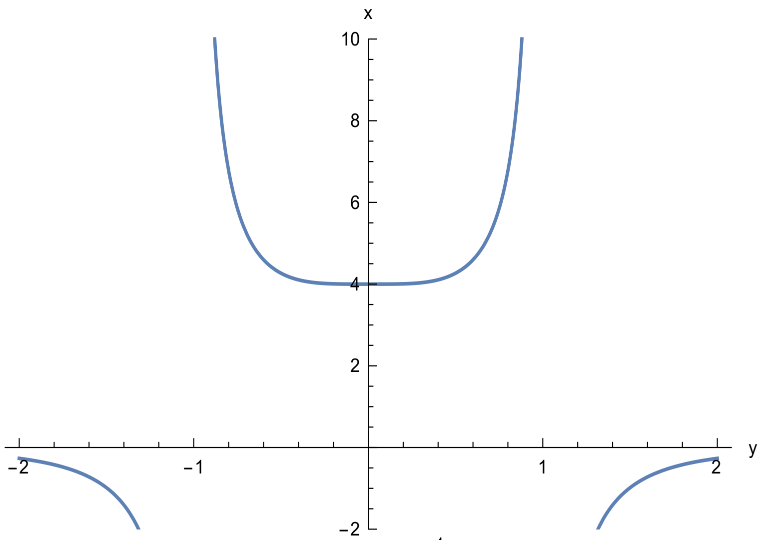
a) Durch Separation erhält man:

$$y' = x^3 y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = x^3 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x^3 dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^4}{4} + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{-x^4/4 - c}$$

Die Anfangsbedingung ergibt:

$$4 = y(0) = -1/c \;\Rightarrow\; c = -1/4 \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{1/4 - x^4/4} = \frac{4}{1 - x^4}.$$

Die Lösung existiert im Bereich $1 - x^4 > 0 \Leftrightarrow x \in\,]-1, 1[\,.$



Funktionsgraph von $y(x) = \dfrac{4}{1 - x^4}$

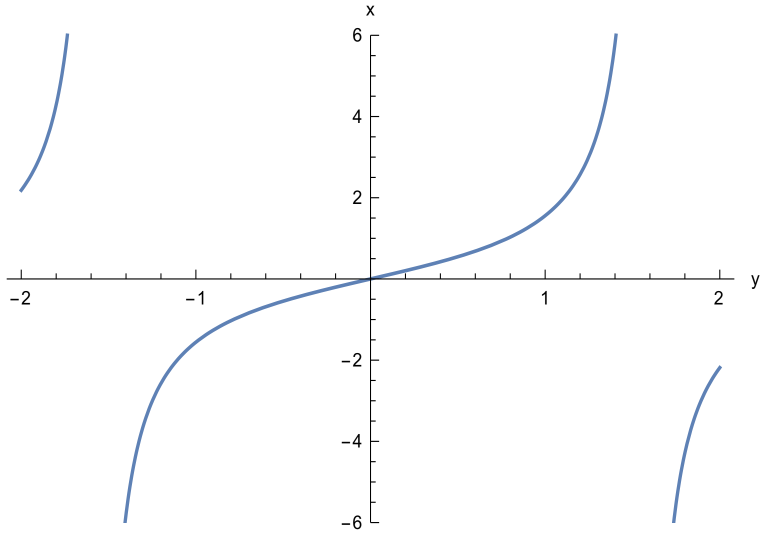
b) Durch Separation erhält man

$$y' = y^2+1 \Rightarrow \frac{y'}{y^2+1} = 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx \Rightarrow \arctan y = x+c \Rightarrow y(x) = \tan(x+c).$$

Die Anfangsbedingung ergibt:

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}+c\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4}+c = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y(x) = \tan x.$$

Die Lösung existiert im Bereich $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



Funktionsgraph von $y(x) = \tan(x)$

c) Bernoullische Differentialgleichung

$$y' - y + e^x y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' + ay + by^\alpha = 0$$

mit $a(x) = -1$ und $b(x) = e^x$ und $\alpha = 2$.
Substitution $u(x) = (y(x))^{1-2} = (y(x))^{-1}$ ergibt $u' = -u + e^x$.
Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $u' = -u$ lautet:

$$u_h(x) = Ce^{-x}.$$

Variation der Konstanten $u_p(x) = C(x)e^{-x}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt:

$$C'(x)e^{-x} = e^x \Rightarrow C'(x) = e^{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow u_p(x) = \frac{e^x}{2}$$

allgemeine Lösung: $u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ce^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$

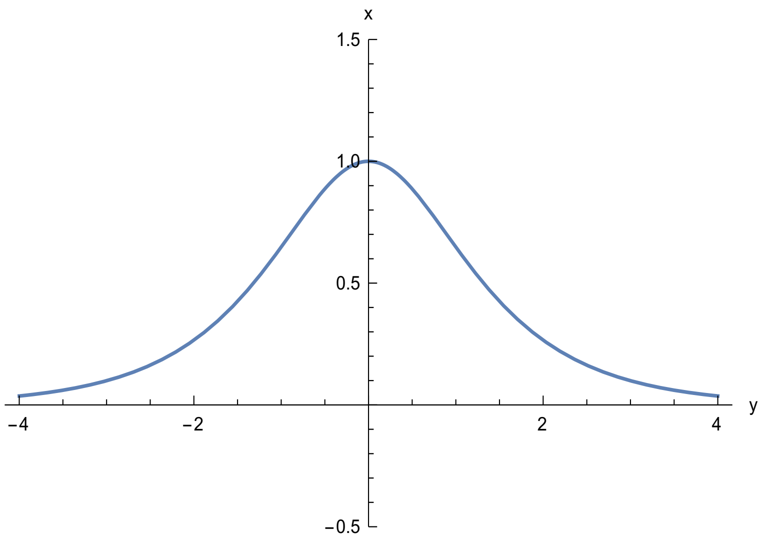
Rücksubstitution: $y(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{Ce^{-x} + \dfrac{e^x}{2}}$

Anfangsbedingung: $1 = y(0) = \dfrac{1}{C + \dfrac{1}{2}} \;\Rightarrow\; C = \dfrac{1}{2}$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y(x) = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{\cosh(x)}$$

existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.



Funktionsgraph von $y(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$

Abgabetermin: 25.11. - 29.11.2019 (zu Beginn der Übung)