Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5:

Durch Substitution löse man die Differentialgleichung

$$y' + \frac{3}{4} = \frac{x}{4(4y+3x+2)^3} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$$

Lösung:

Substitution: $u = 4y + 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4}(u' - 3) \quad \text{und} \quad u(0) = 2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(u' - 3) = y' = \frac{x}{4(4y+3x+2)^3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{u^3} - 3\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u' = \frac{x}{u^3}}$$

Separation: $\displaystyle\int u^3 \, du = \int x \, dx$

$$\Rightarrow \quad \frac{u^4}{4} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{u(0)^4}{4} = \frac{0^2}{2} + c = c \quad \Rightarrow \quad u(x) = \sqrt[4]{2x^2 + 16}$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich:

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{2x^2 + 16} - 3x - 2\right) .$$

Aufgabe 6:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a) $y' = -4xy - xy^2$,

b) $y' + x^3y + (5x^4 - 2x^3 - 5/4)y^5 = 0$.

Lösung:

a) Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$

$$y' = -4xy - xy^2 \Leftrightarrow y' + \underbrace{4x}_{=a(x)} y + \underbrace{x}_{=b(x)} y^2 = 0$$

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = 1/y(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = 1/u(x)$$

führt nach Einsetzen in die Differentialgleichung auf

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \Rightarrow u' - 4x\,u = x$$

Trennung der Variablen für die Lösung der homogenen DGL $\quad u' - 4xu = 0$

$$\frac{u'}{u} = 4x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int 4x\,dx \quad \Rightarrow \quad \log|u| = 2x^2 + k \quad \Rightarrow \quad u = ce^{2x^2}.$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL: $\quad u_h(x) = c\,e^{2x^2}$ mit $c \in \mathbb{R}$
Lösung der inhomogenen DGL mit Variation der Konstanten: $u_p(x) = c(x)e^{2x^2}$
Die Bestimmungsgleichung für $c(x)$ lautet: $\quad c'(x)e^{2x^2} = h(x)$.

$$c'(x)e^{2x^2} = x \quad \Rightarrow \quad c'(x) = xe^{-2x^2} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int xe^{-2x^2}dx = -\frac{1}{4}e^{-2x^2}$$

Man erhält

$$u_p(x) = c(x)e^{2x^2} = -\frac{1}{4}e^{-2x^2}e^{2x^2} = -\frac{1}{4}$$

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c\,e^{2x^2} - \frac{1}{4} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Rücksubstitution: $y(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{c\,e^{2x^2} - 1/4} = \dfrac{4}{C\,e^{2x^2} - 1}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) $y' + \underbrace{x^3}_{=a(x)} y + \underbrace{(5x^4 - 2x^3 - 5/4)}_{b(x)} y^5 = 0$

ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 5$.

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = 1/y^4(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = 1/\sqrt[4]{u(x)}$$

führt nach Einsetzen in die Differentialgleichung auf

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \;\Rightarrow\; u' - 4x^3u = 20x^4 - 8x^3 - 5$$

Die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $u' - 4x^3u = 0$ lautet:

$$u_h(x) = ce^{x^4}.$$

Setzt man den speziellen Ansatz $u_p(x) = ax + b$ in die inhomogene lineare Differentialgleichung $u' - 4x^3u = 20x^4 - 8x^3 - 5$ ein

$$a - 4x^3(ax + b) = -4ax^4 - 4bx^3 + a \stackrel{!}{=} 20x^4 - 8x^3 - 5$$

so ergibt ein Koeffizientenvergleich $a = -5$ und $b = 2$

$$\Rightarrow \quad u_p(x) = 2 - 5x \,.$$

Die rücksubstituierte Lösung lautet daher:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{u_h(x) + u_p(x)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ce^{x^4} + 2 - 5x}} \,.$$

Aufgabe 7:

Man löse die Differentialgleichung $y' - 6y + 3x^2y^2 = -2x^{-3} - 3x^{-2}$.

Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form Cx^α.

Lösung:

Ein Vergleich von

$$y' - 6y + 3x^2y^2 = -2x^{-3} - 3x^{-2}$$

mit

$$y(x)' + a(x)y(x) + b(x)y^2(x) = c(x)$$

ergibt, dass es sich um eine Riccatische Differentialgleichung handelt mit

$$a(x) = -6\,, \quad b(x) = 3x^2\,, \quad c(x) = -2x^{-3} - 3x^{-2}.$$

Den Ansatz $y_p(x) = Cx^\alpha$ für die partikuläre Lösung eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$$-2x^{-3} - 3x^{-2} = y_p' - 6y_p + 3x^2y_p^2 = C\alpha x^{\alpha-1} - 6Cx^\alpha + 3C^2x^{2\alpha+2}.$$

Nach Vergleich der Koeffizienten stellt sich $C = 1$ und $\alpha = -2$ als eine Lösung heraus. Eine Lösung lautet also $y_p(x) = x^{-2}$.

Setzt man die Transformation

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - y_p(x)} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)}$$

in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-2x^{-3} - 3x^{-2} &= y_p' - u'u^{-2} - 6(y_p + u^{-1}) + 3x^2(y_p^2 + 2y_pu^{-1} + u^{-2}) \\
&= \underbrace{y_p' - 6y_p + 3x^2y_p^2}_{=-2x^{-3}-3x^{-2}} - u'u^{-2} - 6u^{-1} + 3x^2(2y_pu^{-1} + u^{-2}) \\
\Rightarrow \quad u'u^{-2} &= -6u^{-1} + 3x^2(2y_pu^{-1} + u^{-2}) \\
\Rightarrow \quad u' &= -6u^1 + 3x^2(2y_pu^1 + u^0) = (-6 + 6x^2/x^2)u + 3x^2 \; = \; 3x^2 \\
\Rightarrow \quad u &= x^3 + K\,.
\end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3 + K}\,.$$

Aufgabe 8:
Man zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist

$$3x^2 + 2xy + \cos(x + y^2) + \big(x^2 + 2y\cos(x + y^2) + 1\big)\, y' = 0\,.$$

Man löse die Differentialgleichung, wobei eine Lösungsdarstellung durch eine implizite Gleichung ausreicht.

Lösung:

Für $\underbrace{3x^2 + 2xy + \cos(x + y^2)}_{=g(x,y)} + (\underbrace{x^2 + 2y\cos(x + y^2) + 1}_{=h(x,y)})y' = 0$

gilt die Integrabilitätsbedingung für exakte Differentialgleichungen

$$g_y(x,y) = 2x - 2y\sin(x + y^2) = h_x(x,y)\,.$$

Potentialberechnung zum Gradientenfeld $(g,h)^T$ durch Integration der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
& \Phi_x(x,y) = g(x,y) = 3x^2 + 2xy + \cos(x + y^2) \\
\Rightarrow\quad & \Phi(x,y) = x^3 + x^2y + \sin(x + y^2) + c(y) \\
\Rightarrow\quad & \Phi_y(x,y) = x^2 + 2y\cos(x + y^2) + c'(y) \overset{!}{=} x^2 + 2y\cos(x + y^2) + 1 \\
\Rightarrow\quad & c'(y) = 1 \;\Rightarrow\; c(y) = y - K
\end{aligned}$$

Damit lautet das Potential $\quad \Phi(x,y) = x^3 + x^2y + \sin(x + y^2) + y - K$

Lösungsdarstellung von Φ durch Äquipotentiallinien:

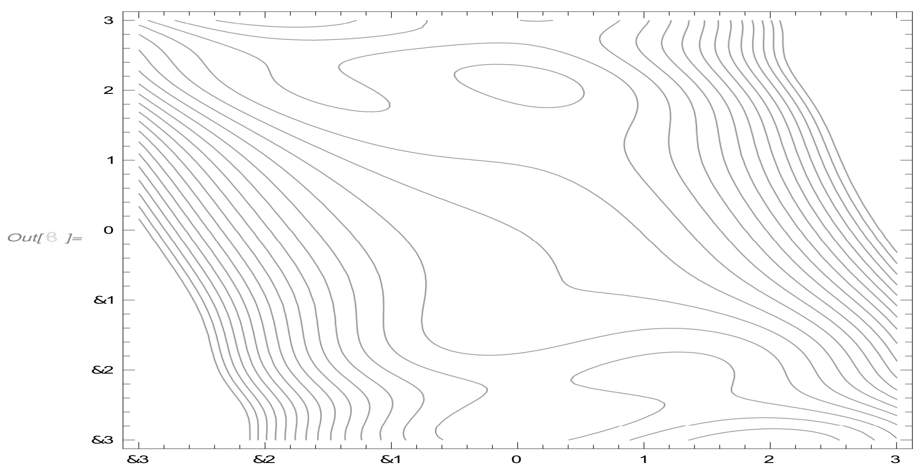

Bild 8 Äquipotentiallinien für $x^3 + x^2y + \sin(x + y^2) + y = C$

Abgabetermin: 11.11. - 15.11.2019 (zu Beginn der Übung)