Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $6y' + 7y = 5$,

b) $y'e^{-x} = y^2 + 9$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Lösung:

a) $6y' + 7y = 5 \quad \Rightarrow \quad 6y' = -(7y-5) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{6y'}{7y-5} = -1$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{6y'(x)}{7y(x)-5}\,dx = -\int dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{6dy}{7y-5} = -x + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{7}\log|7y-5| = -x + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad |7y-5| = e^{-7(x-\tilde{c})/6} = e^{-7x/6}e^{7\tilde{c}/6} = ke^{-7x/6} \ \text{ mit } \ k > 0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \left(5 \pm ke^{-7x/6}\right)/7 = \frac{5}{7} + ce^{-7x/6} \ \text{ mit } \ c \in \mathbb{R}\,.$$

Probe:

$$6y'(x) + 7y(x) = 6\left(\frac{5}{7} + ce^{-7x/6}\right)' + 7\left(\frac{5}{7} + ce^{-7x/6}\right)$$

$$= -7ce^{-7x/6} + 5 + 7ce^{-7x/6} = 5$$

b) $y'e^{-x} = y^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad y' = e^x(y^2+9) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y'}{y^2+9} = e^x$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{9}\int \frac{y'}{(y/3)^2+1}\,dx = \int e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\arctan\frac{y}{3} = e^x + \tilde{c} \;\text{ mit }\; \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{3} = \tan\left(3e^x + c\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = 3\tan\left(3e^x + c\right)$$

Probe:

$$\begin{aligned} y'(x)e^{-x} &= \left(3\tan\left(3e^x+c\right)\right)' e^{-x} = 3\left(1+\tan^2\left(3e^x+c\right)\right)3e^x e^{-x} \\ &= 9 + 9\tan^2\left(3e^x+c\right) = y^2(x) + 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = xy^2 - 2xy - 3x$ mit $y(0) = 1$.

b) Man löse die Differentialgleichung $x^2y' - y^2 - xy + x^2 = 0$.

Lösung:

a) Lösung durch Separation:

$$y' = xy^2 - 2xy - 3x \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y^2 - 2y - 3} = \frac{y'}{(y-3)(y+1)} = x$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(y-3)(y+1)} dy = \int \frac{1}{4(y-3)} - \frac{1}{4(y+1)} = \int x dx$$

$$\Rightarrow \log|y-3| - \log|y+1| = 2x^2 + c \;\Rightarrow\; \frac{y-3}{y+1} = Ce^{2x^2} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{3 + Ce^{2x^2}}{1 - Ce^{2x^2}}$$

Mit $y(0) = 1$ wird $C \in \mathbb{R}$ festgelegt: $Ce^0 = C = \dfrac{y(0) - 3}{y(0) + 1} = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet $y(x) = \dfrac{3 - e^{2x^2}}{1 + e^{2x^2}}$.

b) Umwandlung in eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung ($x \neq 0$):

$$x^2y' - y^2 - xy + x^2 = 0 \;\Rightarrow\; y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1$$

Substitution $u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = xu$ führt auf

$$(xu)' = u + xu' = u^2 + u - 1 \;\Rightarrow\; \boxed{u' = \frac{u^2 - 1}{x}} \;\Rightarrow\; \frac{u'}{u^2 - 1} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \, du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log|u-1| - \log|u+1| = \log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \log x^2 + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = cx^2 \;\Rightarrow\; u = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2} \;\Rightarrow\; y(x) = x \cdot \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}$$

Aufgabe 3:

Man löse die linearen Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $\dot{y} + 2y = 3 + 6t$,

b) $\dot{y} - 2ty = (6 - 4t)e^{3t}$.

Lösung:

a) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{y} + 2y = 0$ durch Separation:

$\dot{y} + 2y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\dot{y}}{y} = -2 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2\,dt$

$\Rightarrow\; \log|y(t)| = -2t + \tilde{c} \;\Rightarrow\; y(t) = ce^{-2t}$

Spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung
$\dot{y} + 2y = 3 + 6t =: h(t)$ durch Variation der Konstanten:

$$y_p(t) = c(t)e^{-2t}.$$

Damit lautet die Bestimmungsgleichung für $c(t):\quad \dot{c}(t)e^{-2t} = h(t)$.

$\Rightarrow\; \dot{c}(t)e^{-2t} = 3 + 6t \;\Rightarrow\; \dot{c}(t) = (3 + 6t)e^{2t}$

$\Rightarrow\; c(t) = \displaystyle\int (3 + 6t)e^{2t}\,dt = \frac{(3 + 6t)e^{2t}}{2} - \int 3e^{2t}\,dt = 3te^{2t}$

$\Rightarrow\; y_p(t) = c(t)e^{-2t} = 3te^{2t}e^{-2t} = 3t$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(t) = ce^{-2t} + y_p(t) = ce^{-2t} + 3t\,.$$

Bemerkung:
Da nur eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung berechnet werden soll, kann bei der Stammfunktionsbestimmung die Integrationskonstante $k = 0$ gesetzt werden. Für $k \neq 0$ hätte man erhalten:

$\hat{c}(t) = 3te^{2t} + k \;\Rightarrow\; y_p(t) = ke^{-2t} + 3t.$

Zwei inhomogene Lösungen unterscheiden sich also nur durch einen homogenen Lösungsanteil, der durch die anschließende Superposition ohnehin berücksichtigt wird.

b) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{y} - 2ty = 0$ durch Separation:

$$\dot{y} - 2ty = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\dot{y}}{y} = 2t \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int 2t\,dt$$

$$\Rightarrow\; \log|y(t)| = t^2 + \tilde{c} \;\Rightarrow\; y(t) = ce^{t^2}$$

Spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $\dot{y} - 2ty = (6-4t)e^{3t} =: h(t)$ durch Variation der Konstanten:

$$y_p(t) = c(t)e^{t^2}.$$

Damit lautet die Bestimmungsgleichung für $c(t)$: $\quad \dot{c}(t)e^{t^2} = h(t)\,.$

$$\Rightarrow\; \dot{c}(t)e^{t^2} = (6-4t)e^{3t} \;\Rightarrow\; \dot{c}(t) = (6-4t)e^{3t-t^2}$$

$$\Rightarrow\; c(t) = \int (6-4t)e^{3t-t^2}\,dt \overset{u=3t-t^2}{=} \int 2e^u\,du = 2e^u = 2e^{3t-t^2}$$

$$\Rightarrow\; y_p(t) = c(t)e^{t^2} = 2e^{3t-t^2}e^{t^2} = 2e^{3t}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(t) = ce^{t^2} + y_p(t) = ce^{t^2} + 2e^{3t}\,.$$

Aufgabe 4:
Man löse die linearen Differentialgleichungen mit einem speziellen Ansatz für die Inhomogenität:

a) $y' - 5y = -5x^2 + 12x - 2\,,$

b) $y' + y = \sin(x)\,.$

Lösung:

a) (i) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - 5y = 0$ durch Separation

$$y' - 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 5 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int 5dx \quad \Rightarrow \quad \log|y| = 5x + K.$$

Auflösen nach y ergibt $y_h(x) = Ce^{5x}$ mit $C \in \mathbb{R}\,.$

(ii) Ein spezieller Ansatz zur Berechnung der inhomogenen Differentialgleichung $y' - 5y = -5x^2 + 12x - 2$ lautet:

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Dieser wird in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$-5x^2 + 12x - 2 = (ax^2 + bx + c)' - 5(ax^2 + bx + c) = -5ax^2 + (2a - 5b)x + b - 5c.$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhält man

$$-5 = -5a \Rightarrow a = 1, \quad 12 = (2a - 5b) \Rightarrow b = -2, \quad -2 = b - 5c \Rightarrow c = 0.$$

Eine spezielle inhomogene Lösung lautet $y_p(x) = x^2 - 2x.$

(iii) Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{5x} + x^2 - 2x.$$

b) (i) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + y = 0$ durch Separation

$$y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = -\int dx \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -x + K.$$

Auflösen nach y ergibt $y_h(x) = Ce^{-x}$ mit $C \in \mathbb{R}\,.$

(ii) Ein spezieller Ansatz zur Berechnung der inhomogenen Differentialgleichung $y' + y = \sin(x)$ lautet:

$$y_p(x) = a\sin(x) + b\cos(x).$$

Dieser wird in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$\sin(x) = (a\sin(x)+b\cos(x))'+(a\sin(x)+b\cos(x)) = (a-b)\sin(x)+(a+b)\cos(x).$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhält man

$$a+b=0 \;\Rightarrow\; b=-a, \quad 1=a-b=2a \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b=-\frac{1}{2}.$$

Eine spezielle inhomogene Lösung lautet $y_p(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)-\cos(x))$.

(iii) Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x)-\cos(x)).$$

Abgabetermin: 28.10. - 1.11.2019 (zu Beginn der Übung)