Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Präsenzblatt 0

Aufgabe A:
Ein Tank enthalte 2000 Liter Wasser, in dem 60 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute 15 Liter Salzlösung abfließen, aber auch 15 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 3 kg zufließen, mit anschließender sofortiger Durchmischung.

a) Wie groß ist der Salzgehalt $m(t)$ in kg im Tank zur Zeit $t > 0$?

b) Auf welchem Niveau stabilisiert sich der Salzgehalt im Tank?

Lösung:

a) Anfangssalzmenge im Tank: $m(0) = 60$ kg

Salzmenge zum Zeitpunkt t je Liter im Tank: $\dfrac{m(t)}{2000}$ kg

abfließende Salzmenge in der Zeit Δt: $\dfrac{m(t)}{2000} \cdot 15\Delta t$

zufließende Salzmenge in der Zeit Δt: $3\Delta t$

Salzmengenänderung in der Zeit Δt: $\Delta m = -\dfrac{m(t)}{2000} \cdot 15\Delta t + 3\Delta t$

Differentialgleichung für den Salzgehalt: $m'(t) = -\dfrac{3}{400} \cdot m(t) + 3$

Lösung der Differentialgleichung über Trennung der Veränderlichen:

$$m'(t) = -\frac{3}{400} \cdot m(t) + 3 = -\frac{3}{400}\,(m(t) - 400) \;\Rightarrow\; \int \frac{m'(t)}{m(t) - 400} dt = -\int \frac{3}{400} dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dm}{m - 400} = -\frac{3t}{400} + \tilde{C} \qquad \Rightarrow \quad \ln|m - 400| = -\frac{3t}{400} + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad |m(t) - 400| = Ce^{-\frac{3t}{400}} \qquad \Rightarrow \quad m(t) = 400 + Ke^{-\frac{3t}{400}} \text{ mit } K \in \mathbb{R}$$

Mit dem Anfangssalzgehalt wird K bestimmt:

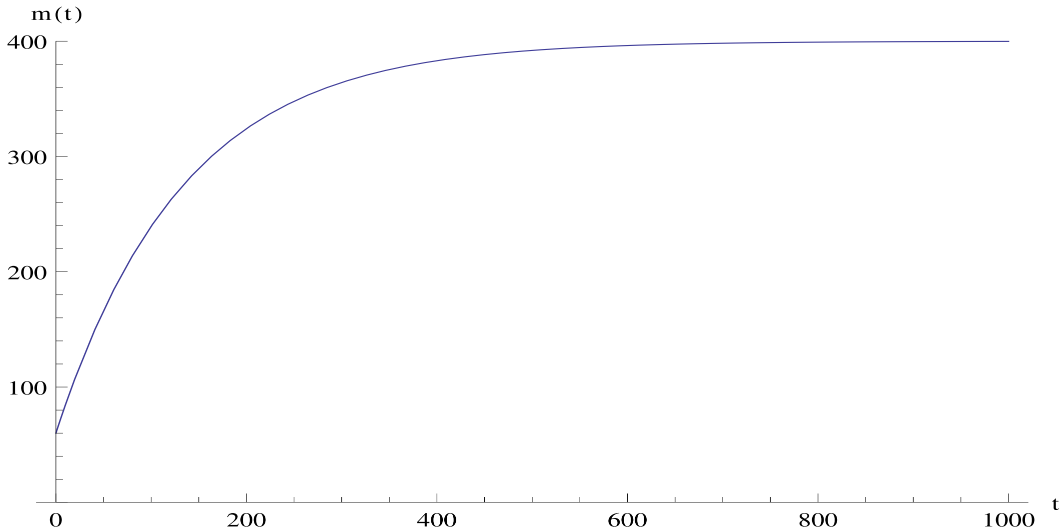
$$60 = m(0) = 400 + K \;\Rightarrow\; K = -340$$

Damit ergibt sich der Salzgehalt in kg im Tank zur Zeit $t \geq 0$:

$$m(t) = 400 - 340e^{-3t/400}.$$

b) Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = 400 = 2000 \cdot \dfrac{3}{15}$,

d.h. der Salzgehalt im Tank pendelt sich auf den der zufließenden Salzlösung ein.



Salzlösung $\quad m(t) = 400 - 340e^{-3t/400}$

Aufgabe B:

Gegeben sei die Differentialgleichung $\quad y' = -\dfrac{y}{x}\,.$

a) Man zeichne das Richtungsfeld,

b) berechne Lösungen und

c) die Lösung, für die $y(2) = 1$ gilt.

Lösung:

a) Eine Differentialgleichung der Form $y' = f(x,y)$ wird gelöst durch eine Funktion $y(x)$, wenn $y'(x) = f(x, y(x))$ gilt.

Ordnet man jedem Punkt (x,y) den Wert $y' = f(x,y)$ zu, deutbar als Steigung möglicher Lösungen y, so erhält man das zur Differentialgleichung gehörige **Richtungsfeld**.

Das Richtungsfeld wird veranschaulicht, indem man jedem Punkt (x,y) ein kleines Geradenstück in Tangentialrichtung, das sogenannte **Linienelement**, anheftet.

Zur zeichnerische Umsetzung ordnen wir dazu jedem Punkt $(x, y(x))$ seinen auf kurze Länge c skalierten Tangentialvektor zu:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{c}{\sqrt{1+f^2(x,y)}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad \left(= \frac{c}{\sqrt{1+(y')^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \right).$$

Vektorwertige Funktionen der Form $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ werden als **Vektorfelder** bezeichnet. Wir zeichnen das obige Richtungsfeld also durch ein Vektorfeld ($n = 2$) der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} =: \boldsymbol{g}\,(x,y)\,.$$

Die MATLAB-Befehle für das Richtungsfeld, dargestellt nur an einigen (Gitter-) Punkten (x,y), lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-2.5:.25:2.5,-2.5:.25:2.5)
N=sqrt(1+Y.^2./X.^2)
U=1./N
V=-Y./X./N
quiver(X,Y,U,V,0.5)
```

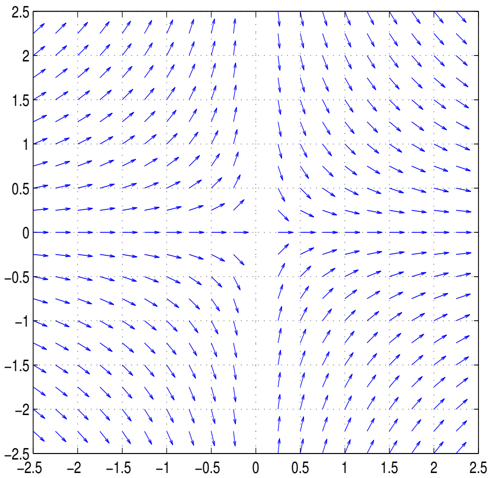
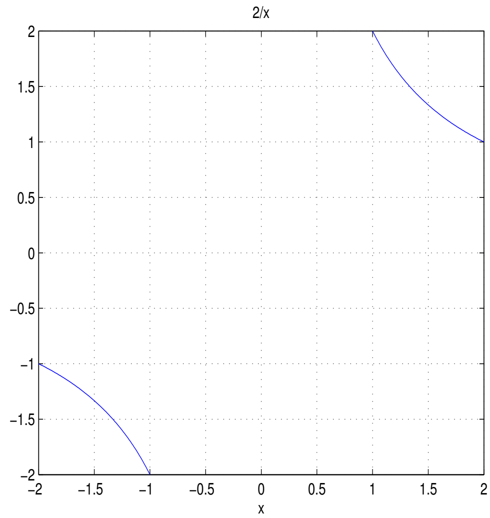


Bild A Richtungsfeld mit $c = 0.5$



$$y(x) = \frac{2}{x}$$

b) Das Lösen der Differentialgleichung erfolgt durch Trennung der Veränderlichen (mit $y \neq 0$) und Integration unter Verwendung der Kettenregel:

$$y' = -\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow\; \ln|y(x)| = -\ln|x| + \tilde{C} \;\Rightarrow\; |y(x)| = \frac{1}{|x|}\cdot e^{\tilde{C}} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{C}{x}\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Für $y = 0$ ergibt sich die triviale Lösung $y(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

Diese berechneten Lösungen sind nach a) die Kurven, deren Tangentialrichtungen durch das Richtungsfeld dargestellt werden, die sich sozusagen in das Richtungsfeld einschmiegen.

c) $1 = y(2) = \dfrac{C}{2} \;\Rightarrow\; C = 2 \;\Rightarrow\; y(x) = \dfrac{2}{x}$

Aufgabe C:

Ein Fallschirmspringer hat im Moment des Öffnens seines Fallschirmes eine Geschwindigkeit von $v_0 = 55$ (in ms^{-1}). Die Gesamtmasse des Springers mit Fallschirm sei M (in kg) und die Bremskraft des Schirmes sei $Mg \cdot \frac{v^2}{25}$ (in N) mit $g = 9.81$ (in ms^{-2}) als Erdbeschleunigung. Man berechne die Geschwindigkeit des Springers nach dem Öffnen des Schirmes als Funktion der Zeit und gegebenenfalls die Grenzgeschwindigkeit ($t \to \infty$). Hängt die Grenzgeschwindigkeit von der Öffnungsgeschwindigkeit ab?

Lösung:

Erdanziehungskraft: Mg

Bremskraft zum Zeitpunkt t: $\quad Mg \cdot \frac{v^2(t)}{25}$, mit $\quad v(0) = v_0 = 55$

Kraftbilanz am Fallschirmspringer mit Verzögerung $a(t) = \dot{v}(t)$, falls $v_0 > 5$:

$$Ma(t) = M\dot{v}(t) = Mg - Mg \cdot \frac{v^2(t)}{25}$$

Die Fallgeschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich damit aus der Differentialgleichung:

$$\dot{v}(t) = g\left(1 - \frac{v^2(t)}{25}\right) = \frac{g}{25}(25 - v^2(t)) = -\frac{g}{25}(v(t) - 5)(v(t) + 5)$$

Trennung der Veränderlichen, Integration mit Substitutionsregel und Partialbruchzerlegung ergibt:

$$-\int_0^t \frac{g}{25} d\tau = \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{(v(\tau) - 5)(v(\tau) + 5)} d\tau = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{(v-5)(v+5)}\, dv = \frac{1}{10} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v-5} - \frac{1}{v+5}\, dv$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{10gt}{25} = (\ln(v-5) - \ln(v+5))\Big|_{v_0}^{v(t)} = \ln \frac{v-5}{v+5}\Bigg|_{v_0}^{v(t)}$$

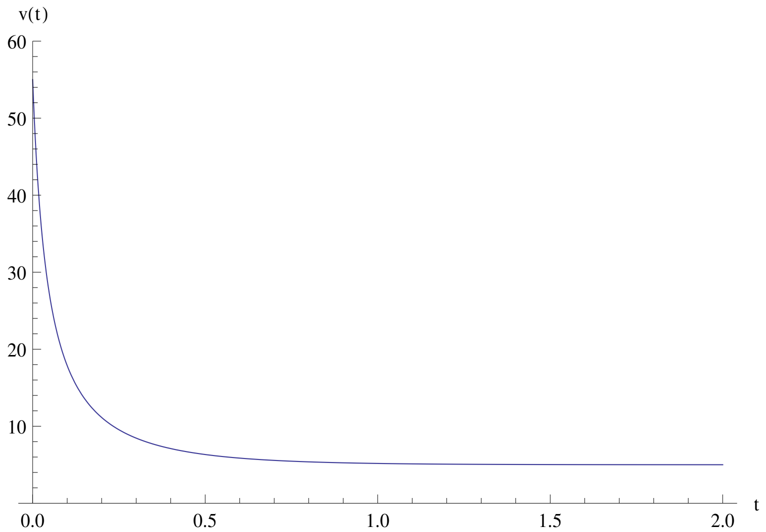
$$= \ln \frac{v(t) - 5}{v(t) + 5} - \ln \frac{v_0 - 5}{v_0 + 5} = \ln \frac{(v_0 + 5)(v(t) - 5)}{(v_0 - 5)(v(t) + 5)} \quad \Rightarrow \quad \frac{(v_0 + 5)(v(t) - 5)}{(v_0 - 5)(v(t) + 5)} = e^{-10gt/25}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{(v_0 + 5)(v(t) - 5)}{(v_0 - 5)(v(t) + 5)} = \lim_{t\to\infty} e^{-10gt/25} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = 5$$

Die Grenzgeschwindigkeit hängt also nicht von der Öffnungsgeschwindigkeit ab.

Speziell für $v_0 = 55$ ergibt sich:

$$\frac{(v_0 + 5)(v(t) - 5)}{(v_0 - 5)(v(t) + 5)} = \frac{6(v(t) - 5)}{5(v(t) + 5)} = e^{-10gt/25} \quad \Rightarrow \quad v(t) = 5 \cdot \frac{6 + 5e^{-10gt/25}}{6 - 5e^{-10gt/25}}$$



Geschwindigkeit $\quad v(t) = 5 \cdot \dfrac{6 + 5e^{-10gt/25}}{6 - 5e^{-10gt/25}}$

Bearbeitungstermin: 14.10. - 18.10.2019