Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Methode von Ljapunov:

Ist der Stabilitätssatz III nicht anwendbar, so kann u.U. die **Methode von Ljapunov** weiterhelfen.

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, d.h. $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{0}$ ist stationärer Punkt.

Für die C^1-Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ und dem abgeschlossenen Kreis um $\boldsymbol{0}$ vom Radius R mit $\bar{K}_R(\boldsymbol{0}) \subset D$ gelte $V(\boldsymbol{0}) = 0$ und $V(\boldsymbol{y}) > 0$ für $\boldsymbol{y} \in \bar{K}_R(\boldsymbol{0}) \backslash \{\boldsymbol{0}\}$.

Die Richtungsableitung von V nach $\boldsymbol{y}'$ werde bezeichnet mit

$$\varphi(\boldsymbol{y}) := \langle \nabla V(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \rangle$$

a) V heißt **Ljapunov-Funktion** für $\boldsymbol{f}$, falls gilt

$$\varphi(\boldsymbol{y}) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{y} \in \bar{K}_R(\boldsymbol{0}),$$

b) V heißt **strenge Ljapunov-Funktion** für $\boldsymbol{f}$, falls gilt

$$\varphi(\boldsymbol{y}) < 0 \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{y} \in \bar{K}_R(\boldsymbol{0}) \backslash \{\boldsymbol{0}\}.$$

Stabilitätssatz IV:

a) Existiert eine Ljapunov-Funktion V, so ist $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ stabiler Gleichgewichtspunkt.

b) Existiert eine strenge Ljapunov-Funktion V, so ist $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

c) Gilt $\varphi(\boldsymbol{y}) > 0$ für alle $\boldsymbol{y} \in \bar{K}_R(\boldsymbol{0}) \backslash \{\boldsymbol{0}\}$, so ist $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ instabiler Gleichgewichtspunkt.

Aufgabe 25:

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1^5 - 4y_1y_2^2\,, \\ y_2' &= y_1^2y_2 - 5y_2^3\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gesucht werden soll.

Lösung:

a) $\boldsymbol{y}^* = \mathbf{0}$

b) Stabilitätssatz III ist nicht anwendbar.

c) Ljapunov-Funktion: $V(\boldsymbol{y}) = y_1^2 + 4y_2^2$

Siehe Blatt 7.

Lineare Zweipunkt-Randwertaufgaben bei Systemen

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t)$$

mit stetigen Funktionen $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\boldsymbol{h}(t) \in \mathbb{R}^n$. Außerdem seien die Matrizen $\boldsymbol{B}_a, \boldsymbol{B}_b \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass in den Randpunkten $t = a$ und $t = b$ das folgende lineare Gleichungssystem erfüllt ist

$$\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{y}(a) + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{d}\,.$$

Satz: (Existenz und Eindeutigkeit)

Bezeichnet $\boldsymbol{Y}(t)$ ein Fundamentalsystem von $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}(t)$, dann sind für die obige lineare Zweipunkt-Randwertaufgabe folgende Aussagen äquivalent:

a) Die **Shooting-Matrix**

$$\boldsymbol{E} := \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{Y}(a) + \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{Y}(b)$$

ist invertierbar.

b) Die homogene Zweipunkt-Randwertaufgabe, d.h. $\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ besitzt nur die triviale Lösung $\boldsymbol{y} = 0$.

c) Die Zweipunkt-Randwertaufgabe ist für alle Inhomogenitäten $\boldsymbol{h}(t)$ und $\boldsymbol{d}$ eindeutig lösbar.

Aufgabe 26
Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= y_2 + y_3, & \qquad y_1(0) + e^{-1} \cdot y_1(1) &= 2, \\ \dot y_2 &= y_1 + y_3, & y_2(0) + e^{-1} \cdot y_2(1) &= 2, \\ \dot y_3 &= 2y_3, & y_3(0) + e^{-1} \cdot y_3(1) &= 0. \end{aligned}$$

a) Man gebe die Aufgabe in Matrizenschreibweise an,

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems und

c) löse die Randwertaufgabe.

Lösung:

a)

b) allgemeine Lösung: $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & e^{t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$

c) Lösung des Randwertproblems: $\boldsymbol{y}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Siehe Blatt 7.

Variationsrechnung

Untersucht wird das folgende **Variationsproblem**:

Gegeben sei die stetige Funktion $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Menge $M := \{y \in C^1[a,b] \mid y(a) = y_a\ ,\ y(b) = y_b\}$ und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$ mit

$$I[y] := \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt\ .$$

Bestimme $y \in M$ so, dass $I[y] \leq I[z]$ für alle $z \in M$ gilt.

notwendige Bedingung: Euler-Lagrange-Gleichung

Ist f eine C^2-Funktion und minimiert y das Funktional I auf M, so erfüllt y die Euler-Lagrange-Gleichung

$$f_y(t, y(t), y'(t)) - \frac{d}{dt}\left(f_{y'}(t, y(t), y'(t))\right) = 0$$

mit den Randbedingungen $y(a) = y_a$ und $y(b) = y_b$.

Hamilton-Funktion:

Gilt $f = f(y, y')$, ist f also autonom, so liefern Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung y einen konstanten Wert der Hamilton-Funktion H:

$$H(y(t), y'(t)) := f(y(t), y'(t)) - f_{y'}(y(t), y'(t)) \cdot y'(t) = C\ .$$

Aufgabe 27:

Man minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 16y^2 + (y')^2 - 8yy' \, dt$$

für alle C^1-Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(2) = 1$.

a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

b) löse die zugehörige Randwertaufgabe und

c) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.

Lösung:

a) Euler-Lagrange-Gleichung: $y'' = 16y$

b) Lösung der Randwertaufgabe: $y(t) = \dfrac{\sinh 4t}{\sinh 8}$

c) $I\left[\dfrac{\sinh 4t}{\sinh 8}\right] = 9.00281 \cdot 10^{-7}$

Siehe Blatt 7.

Lineare Zweipunkt-Randwertaufgaben 2. Ordnung

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$L[y] := y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = h(t)$$

mit den Randbedingungen in den beiden Punkten $t = a$ und $t = b$:

$$\begin{aligned} R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) &= d_1 \\ R_2[y] := \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) &= d_2 \end{aligned}$$

Eine Lösungsmethode

Man berechne die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \,.$$

Dabei ist y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

Man setze $y(t)$ in die Randbedingungen ein und berechne die Konstanten c_1 und c_2, wenn dies möglich ist.

Alternativ wird die lineare Differentialgleichung umgeschrieben in ein System 1. Ordnung.

Aufgabe 28:

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \le x \le \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$,

b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$,

c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

Lösung:

a) $y(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

b) $y(x) = c_1 \sin 2x \,, \quad c_1 \in \mathbb{R}$.

c) Es gibt keine Lösung.

Siehe Blatt 7.

Lösungsmethode über die Greensche Funktion

a) Man transformiere das Randwertproblem durch $z(t) := y(t) - y_0(t)$ mit einer Funktion y_0, für die $R_1[y_0] = d_1$ und $R_2[y_0] = d_2$ gilt, auf ein Ranwertproblem in z mit homogene Randbedingungen. Dabei muss die Inhomogenität in der Differentialgleichung ersetzt werden durch $\tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0]$.

b) Man berechne ein Fundamentalsystem $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der homogenen Differentialgleichung.

c) Man definiere die **Greensche Funktion**

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))y_2(t) & : \quad a \le \tau \le t \le b \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))y_2(t) & : \quad a \le t \le \tau \le b\,. \end{cases}$$

d) Man berechne die unbekannten Funktionen $b_1(t)$ und $b_2(t)$ im Ansatz der Greenschen Funktion aus der Stetigkeit und Sprungbedingung in der Ableitung für G über die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) &= 0 \\ b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e) Man berechne die verbleibenden unbekannten Funktionen $a_1(t)$ und $a_2(t)$ im Ansatz der Greenschen Funktion aus den Randbedingungen für G über die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} R_1[G] &= \alpha_1 G(a,\tau) + \beta_1 G_t(a,\tau) + \gamma_1 G(b,\tau) + \delta_1 G_t(b,\tau) &= 0 \\ R_2[G] &= \alpha_2 G(a,\tau) + \beta_2 G_t(a,\tau) + \gamma_2 G(b,\tau) + \delta_2 G_t(b,\tau) &= 0 \end{aligned}$$

f) Man berechne die Lösung des Randwertproblems in z durch

$$z(t) = \int_a^b G(t,\tau)\tilde{h}(\tau)\,d\tau\,.$$

g) Man gebe die Lösung des Ausgangsproblems an: $y(t) = z(t) + y_0(t)$.

Aufgabe 29
Man bestimme die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) - \frac{1}{t}y'(t) &= h(t)\,, \quad 1 \le t \le 2 \\ y'(1) = 0\,, \quad y(2) &= 0 \end{aligned}$$

und löse damit die Randwertaufgabe für $h(t) := 2t$.

Hinweis:
Die homogene Differentialgleichung besitzt Lösungen der Form $y(t) = t^\alpha$.

Lösung:

a) Greensche Funktion: $G(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\tau} + \dfrac{1}{2\tau}t^2 & : \ \tau \le t \\[2ex] \dfrac{\tau}{2} - \dfrac{2}{\tau} & : \ t \le \tau \end{cases}$

b) Lösung der Randwertaufgabe: $y(t) = \dfrac{2t^3}{3} - t^2 - \dfrac{4}{3}$

Siehe Blatt 7.

Randeigenwertaufgaben

Gesucht in der linearen Randeigenwertaufgabe 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_1, a_0 sind Funktionen $y \neq 0$ und zugehörige Zahlen λ mit

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \lambda y(t) \, ,$$

die folgende Randbedingungen in den beiden Punkten $t = a$ und $t = b$ erfüllen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) &= 0 \\ \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

λ wird dann als **Eigenwert** und y als zugehörige **Eigenfunktion** bezeichnet.

Lösungsmethode

a) Zur Berechnung der allgemeinen Lösung führt der Ansatz $e^{\mu t}$ auf das charakteristische Polynom

$$p(\mu) = \mu^2 + a_1 \mu + a_0 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \lambda - a_0} \, .$$

Die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von λ lautet somit

$$y(t) = c_1 \underbrace{e^{\left(-a_1/2 + \sqrt{a_1^2/4 + \lambda - a_0}\right) t}}_{y_1(t,\lambda)} + c_2 \underbrace{e^{\left(-a_1/2 - \sqrt{a_1^2/4 + \lambda - a_0}\right) t}}_{y_2(t,\lambda)} \, .$$

Für die reellwertige Darstellung des Fundamentalsystems und die weitere Berechnung der Eigenwerte λ sind hier folgende drei Fälle zu unterscheiden:

$$\frac{a_1^2}{4} + \lambda - a_0 \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0 \, .$$

b) Schreibt man die Differentialgleichung um in ein 2×2 System, so erhält man die, die Randbedingungen beschreibenden Matrizen und die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{B}_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} , \; \boldsymbol{B}_b = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} , \; \boldsymbol{Y}(t,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(t,\lambda) & y_2(t,\lambda) \\ y_1'(t,\lambda) & y_2'(t,\lambda) \end{pmatrix} .$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz besagt nun, dass diese (voll-) homogene ($h(t) = 0$, $d = 0$) lineare Zweipunkt-Randwertaufgabe genau dann eine eindeutige Lösung, nämlich $y = 0 \;\Leftrightarrow\; c_1 = 0 = c_2$ besitzt, wenn $\det \boldsymbol{E}(\lambda) = \det(\boldsymbol{B}_a \boldsymbol{Y}(a,\lambda) + \boldsymbol{B}_b \boldsymbol{Y}(b,\lambda)) \neq 0$ gilt. Dieser Fall führt jedoch nicht auf Eigenfunktionen und wird hier deshalb ausgeschlossen.

Wie bei Matrixeigenwertaufgaben werden also Werte λ gesucht, für die $\boldsymbol{E}(\lambda)$ singulär ist, d.h. $\det \boldsymbol{E}(\lambda) = 0$ gilt.

Zur Berechnung der Eigenfunktionen wird anschließend mit $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)^T$ das Gleichungssystem $\boldsymbol{E}(\lambda)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ mit $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ gelöst.

Aufgabe 30:

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwert-aufgabe

$$y'' - 2y = \lambda y \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 0\,.$$

Lösung:

Eigenwerte: $\lambda_k = -2 - \dfrac{(2k+1)^2\pi^2}{4}\,, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$

Eigenfunktionen: $y_k(t) = d_1 \cos \dfrac{(2k+1)\pi t}{2}\,, \quad d_1 \in \mathbb{R}$

Siehe Blatt 7.