Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

DGl-Typ:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = h(x),$$

$h(x)$ sei eine stetige Funktion und $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$

Lösungen der homogenen Gleichung:

Der Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ eingesetzt in die homogene Gleichung ergibt die **charakteristische Gleichung**

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

mit deren Nullstellen die folgenden linear unabhängigen Lösungen gebildet werden:

a) für jede reelle Nullstelle λ_k der Vielfachheit r_k

$$e^{\lambda_k x}\,, \quad x \cdot e^{\lambda_k x}\,, \quad x^2 \cdot e^{\lambda_k x}\,, \ldots, \; x^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}\,,$$

b) die unter a) angegebene Darstellung gilt prinzipiell auch für komplexe Nullstellen $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert dann die reellen Lösungen

$$e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,, \quad x e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,, \ldots, x^{r_k-1} e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,,$$

$$e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,, \quad x e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,, \ldots, x^{r_k-1} e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,.$$

Superposition

der linear unabhängigen Lösungen mit $y_1(x), \ldots, y_n(x)$

ergibt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\ .$$

Lösungsmethoden für die inhomogene Gleichung:

Spezielle Ansätze:

Besitzt die Inhomogenität $h(x)$ eine spezielle Gestalt, so erzeugen mitunter Lösungsansätze der gleichen Form eine partikuläre Lösung $y_p(x)$:

Beispiel:

$$h(x) = e^{\mu x}(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)$$
$$y_p(x) = e^{\mu x}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0), \qquad \text{falls } \mu \neq \lambda_k$$
$$y_p(x) = x^{r_k} e^{\mu x}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0), \quad \text{falls } \mu = \lambda_k$$

Dabei sind λ_k die Lösungen der charakteristischen Gleichung mit Vielfachheit r_k.

Laplace-Transformation

Für die reell- oder komplexwertige Funktion $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ wird die **Laplace-Transformierte** definiert durch

$$Y(s) := \int_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt \ , \ s \in \mathbb{C}.$$

Die Zuordnung (Korrespondenz) von y zu Y wird auch mit dem **Doetsch-Symbol** ○—●, also durch $y(t)$ ○—● $Y(s)$ oder $Y(s)$ ●—○ $y(t)$, gekennzeichnet.

Die **Linearität** der Integrals überträgt sich auf die Laplace-Transformation.

Beispiel:

Für $y(t) = e^{at}$ sowie $s, a \in \mathbb{R}$ und $s > a$ berechnet man die zugehörige Laplace-Transformierte folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \int_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{r\to\infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^r \\
&= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)r}}{s-a} \right) \overset{s-a>0}{=} \frac{1}{s-a} \ \bullet\!\!-\!\!\circ \ e^{at} \ .
\end{aligned}$$

Korrespondenztabelle

$y(t)$	$Y(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$, n = 1, 2, \ldots$
$e^{at} \cdot y(t)$	$Y(s-a)$	$, a \in \mathbb{R}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$, \omega \in \mathbb{R}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$, \omega \in \mathbb{R}$

Differentiationssatz

Für n-mal differenzierbare Funktionen $y(t)$ mit $t > 0$ und $y(0+) := \lim\limits_{t \searrow 0} y(t)$ gilt ($n = 1, 2, \ldots$):

$$y^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^n Y(s) - s^{n-1} y(0+) - s^{n-2} y'(0+) - \cdots - y^{(n-1)}(0+).$$

Bemerkungen zur Lösung linearer Differentialgleichungen

- Transformation der Differentialgleichung mittels Differentiationssatz
- Lösen der entstehenden algebraischen Gleichung in Y
- ggf. Partialbruchzerlegung von $Y(s) = P(s)/Q(s)$
- Rücktransformation der Partialbrüche mittels Korrenspondenztabelle

Aufgabe 21:

a) $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0$

Das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 4 = (\lambda-1)(\lambda+1)((\lambda+1)^2+3) = 0$$

Die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -1\,, \quad \lambda_3 = -1 + i\sqrt{3}\,, \quad \lambda_4 = -1 - i\sqrt{3}$$

liefern das komplexe Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}, \tilde{y}_3(x) = e^{(-1+i\sqrt{3})x}, \tilde{y}_4(x) = e^{(-1-i\sqrt{3})x}.$$

Zerlegung der komplexen Lösungen in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\tilde{y}_3(x) = e^{(-1+i\sqrt{3})x} = \underbrace{e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)}_{=:y_3(x)} + i\,\underbrace{e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)}_{=:y_4(x)} = \overline{\tilde{y}_4(x)}.$$

Die allgemeine reelle Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + c_4 e^{-x}\sin(\sqrt{3}x) \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

b) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'''-3y'-2y = -6e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 9.$$

(i) Lösen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y''' - 3y' - 2y = 0$$

charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -1\,, \quad \lambda_3 = 2$

Fundamentalsytem:

$$y_1(x) = e^{-x}\,, \quad y_2(x) = xe^{-x}\,, \quad y_3(x) = e^{2x}$$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{2x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$\lambda_{1,2} = -1$ ist doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms

spezieller Ansatz für die Inhomogenität

$$y_p(x) = ax^2 e^{-x}$$

Die Ableitungen lauten:

$y_p'(x) = ae^{-x}(-x^2 + 2x)$,

$y_p''(x) = ae^{-x}(x^2 - 4x + 2)$,

$y_p'''(x) = ae^{-x}(-x^2 + 6x - 6)$.

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$ae^{-x}(-x^2+6x-6)-3ae^{-x}(-x^2+2x)-2ax^2e^{-x} = -6ae^{-x} \stackrel{!}{=} -6e^{-x}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $a = 1$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} + x^2 e^{-x} .$$

c_1 , c_2 , c_3 werden aus den Anfangsbedingungen berechnet.

Mit den Ableitungen

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + (1-x)c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x} + (2x - x^2)e^{-x} ,$$

$$y''(x) = c_1 e^{-x} + (x-2)c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x} + (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

erhält man

$2 = y(0) = c_1 + c_3$,

$0 = y'(0) = -c_1 + c_2 + 2c_3$,

$9 = y''(0) = c_1 - 2c_2 + 4c_3 + 2$.

Lösen des Gleichungssystems ergibt

$$c_1 = 1 \, , \; c_2 = -1 \, , \; c_3 = 1 \, .$$

Damit lautet die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y(x) = e^{-x} - xe^{-x} + e^{2x} + x^2 e^{-x} \, .$$

(ii) Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Die Laplace-Transformierte $\quad y(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s)$.

Die transformierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
-\frac{6}{s+1} &= s^3Y(s) - s^2y(0+) - sy'(0+) - y''(0+) \\
&\quad -3\,(sY(s) - y(0+)) - 2Y(s) \\
&= Y(s)(s^3 - 3s - 2) - 2s^2 - 9 + 6 \\
&= Y(s)(s+1)^2(s-2) - 2s^2 - 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s-2)}\left(2s^2 + 3 - \frac{6}{s+1}\right) \\
&= \frac{(2s^2+3)(s+1) - 6}{(s+1)^3(s-2)} \\
&= \frac{2s^3 + 2s^2 + 3s - 3}{(s+1)^3(s-2)} \\
&\stackrel{PBZ}{=} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s-2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ y(x) = e^{-x} - xe^{-x} + x^2e^{-x} + e^{2x}$$

Aufgabe 22:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u' &= -3u - 2v\,, \quad u(0) = 2 \\ v' &= 2u - 3v\,, \quad v(0) = -3 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung:

Die Laplace-Transformierten

$$u(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s)\,,\ v(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ V(s)$$

Das transformierte Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} sU(s) - u(0+) &= -3U(s) - 2V(s) \\ sV(s) - v(0+) &= 2U(s) - 3V(s) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} U(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+3)^2+4} \begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$U(s) = \frac{2(s+3)+6}{(s+3)^2+4} = 2\frac{s+3}{(s+3)^2+4} + 3\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

$$V(s) = \frac{-3(s+3)+4}{(s+3)^2+4} = -3\frac{s+3}{(s+3)^2+4} + 2\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

Rücktransformation ergibt die Lösungen der Anfangswertaufgabe:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= 2e^{-3x}\cos(2x) + 3e^{-3x}\sin(2x)\ ,\\
v(x) &= 2e^{-3x}\sin(2x) - 3e^{-3x}\cos(2x)\ .
\end{aligned}
$$

Vergleich: Lösen des Systems

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
$$

mit e-Funktionsansatz ergibt das Eigensystem

$$
\lambda_1 = -3+2i, \lambda_2 = -3-2i \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{v}_1 = (1, -i)^T, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, i)^T
$$

und folgende allgemeine Lösung

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} &= d_1 e^{(-3+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + d_2 e^{(-3-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{(d_1 + d_2)}_{=c_1} e^{-3x} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} + \underbrace{i(d_1 - d_2)}_{=c_2} e^{-3x} \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -\cos(2x) \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

$(2, -3) = (u(0), v(0)) = (c_1, -c_2)$ ergibt die gleiche Lösung.

Stabilität

Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei das lineare autonome Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und konstantem Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Lösungen $\boldsymbol{y}^*$ des Systems, für die $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$ gilt, werden als **Gleichgewichtspunkte** oder **stationäre Lösungen** bezeichnet.

Diese Punkte sind also Lösungen des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Durch Verschiebung $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^* \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}^*$ kann das inhomogene System in $\boldsymbol{y}$ in das zugehörige homogene System

$$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$$

in $\boldsymbol{z}$ transformiert werden, mit dem Gleichgewichtspunkt
$\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$.

Ein stationärer Punkt $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

a) **stabil**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des obigen linearen autonomen Systems gilt:

$||\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^*|| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t > 0.$

b) **attraktiv**, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ gilt:

$$||\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*|| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} ||\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^*|| = 0\,.$$

c) **asymptotisch stabil**, wenn $\boldsymbol{y}^*$ stabil und attraktiv ist.

d) **instabil**, wenn $\boldsymbol{y}^*$ nicht stabil ist.

Stabilitätssatz II:

Das Stabilitätsverhalten von $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ wird durch die Eigenwerte λ_k von $\boldsymbol{A}$ geklärt:

a) Gilt $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$, dann ist $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ **asymptotisch stabil**.

b) Es gelte $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ für alle k und $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ für mindestens ein j.

$\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ ist **stabil** aber nicht asymptotisch stabil, wenn $a(\lambda_j) = g(\lambda_j)$ für die j mit $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ gilt, sonst **instabil**.

c) Gilt $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ für wenigstens ein k, dann ist $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ **instabil**.

Dabei bezeichnet $a(\lambda)$ die algebraische und $g(\lambda)$ die geometrischen Vielfachheit von λ.

Klassifikation für $n = 2$:

1. **instabiler Knotenpunkt 1. Art:**
   $\lambda_1 = \lambda_2 > 0\,,\; g(\lambda_1) = 2$
2. **asymp. stabiler Knotenpunkt 1. Art:**
   $\lambda_1 = \lambda_2 < 0\,,\; g(\lambda_1) = 2$
3. **instabiler Knotenpunkt 2. Art:**
   $\lambda_1, \lambda_2 > 0\,,\; \lambda_1 \neq \lambda_2$
4. **asymp. stabiler Knotenpunkt 2. Art:**
   $\lambda_1, \lambda_2 < 0\,,\; \lambda_1 \neq \lambda_2$
5. **instabiler Knotenpunkt 3. Art:**
   $\lambda_1 = \lambda_2 > 0\,, g(\lambda_1) = 1$
6. **asymp. stabiler Knotenpunkt 3. Art:**
   $\lambda_1 = \lambda_2 < 0\,, g(\lambda_1) = 1$
7. **instabiler Sattelpunkt:**
   $\lambda_1 < 0 < \lambda_2\,,$
8. **instabiler nicht isolierter Punkt:**
   $\lambda_1 = 0 < \lambda_2\,,$
9. **stabiler nicht isolierter Punkt:**
   $\lambda_1 = 0 > \lambda_2\,,$
10. **asymp. stabiler Strudelpunkt:**
    $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2\,,\; \mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0\,,\; \mathrm{Re}(\lambda_1) < 0,$
11. **instabiler Strudelpunkt:**
    $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2\,,\; \mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0\,,\; \mathrm{Re}(\lambda_1) > 0,$
12. **stabiler Wirbelpunkt:**
    $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2\,,\; \mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0\,,\; \mathrm{Re}(\lambda_1) = 0.$

Aufgabe 23:

Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt.

Für den Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^*$ gilt

$$(\boldsymbol{y}^*)' = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{b}\,.$$

Durch die Verschiebung $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*$ entspricht dem Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^*$ des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ der Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ des homogenen Systems $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$.

a) Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 5y + 7, \\ \dot{y} &= x - 3y - 9, \end{aligned}$$

(i) Berechnung von $\boldsymbol{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Stabilität und Klassifikation über die Eigenwerte

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)-5 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -4\,,\ \lambda_2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = (1,-1)^T\,,\ \boldsymbol{v}_2 = (5,1)^T$$

Wegen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ist $\boldsymbol{y}^*$ instabiler Sattelpunkt.

(iii) Die allgemeine Lösung des autonomen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

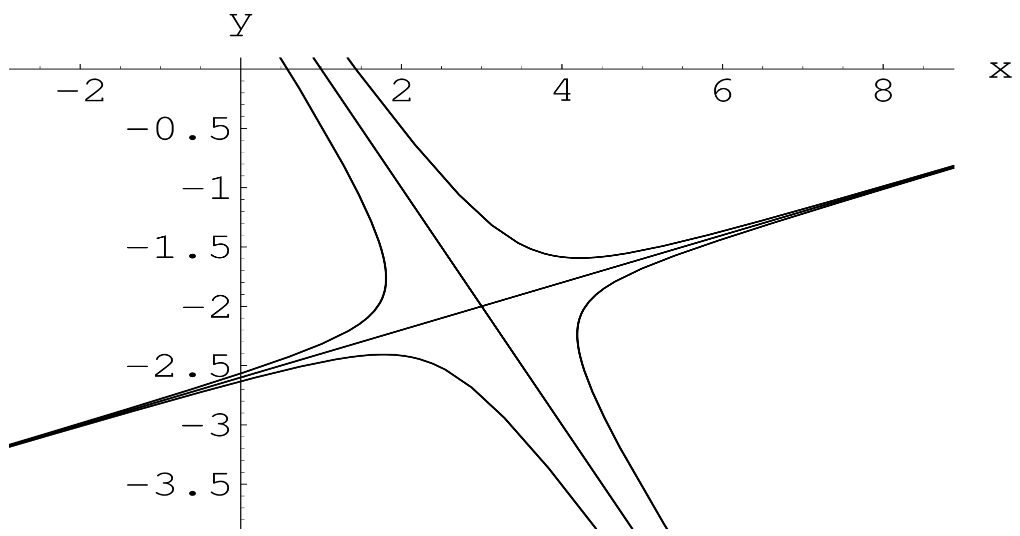

Bild 23 a) instabiler Sattelpunkt $\boldsymbol{y}^* = (3,-2)^T$

b) Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 2y - 6, \\ \dot{y} &= 5x + y - 6. \end{aligned}$$

(i) Berechnung von $\boldsymbol{y}^* = (x^*, y^*)^T$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Stabilität und Klassifikation über die Eigenwerte

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)+10 = \lambda^2+9 = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3i\,, \quad \lambda_2 = -3i = \bar{\lambda}_1 \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{v}_1 = ((-1+3i)/5, 1)^T$,
$\boldsymbol{v}_2 = ((-1-3i)/5, 1)^T = \bar{\boldsymbol{v}}_1$

Da $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2\,, \quad \mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0\,, \quad \mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$

ist $\boldsymbol{y}^*$ stabiler Wirbelpunkt.

(iii) Die allgemeine komplexe Lösung des autonomen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + d_1 \underbrace{e^{3it} \begin{pmatrix} (-1+3i)/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{y}^1} + d_2 e^{-3it} \begin{pmatrix} (-1-3i)/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Real- und Imaginärteil der obigen komplexen Lösung $\boldsymbol{y}^1$ erhält man die allgemeine reelle Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} (-\cos 3t - 3\sin 3t)/5 \\ \cos 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} (3\cos 3t - \sin 3t)/5 \\ \sin 3t \end{pmatrix}.$$

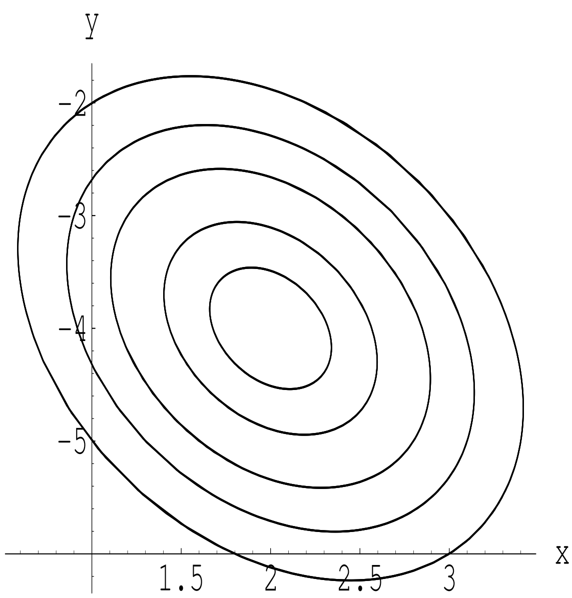

Bild 23 b) stabiler Wirbelpunkt $\boldsymbol{y}^* = (2, -4)^T$

Stabilität

Nichtlineare autonome Systeme 1. Ordnung

Untersucht wird das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichts- oder auch stationären Punktes $\boldsymbol{y}^*$ des nichtlinearen autonomen Systems

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)) ,$$

d.h. es gilt $(\boldsymbol{y}^*)' = \mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)$.

Ist $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ in einer Umgebung von $\boldsymbol{y}^*$ eine C^1-Funktion, so ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{y}^*$ (total) differenzierbar und es gilt:

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*)' = \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*) + o(||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*||) .$$

Transformation in den Nullpunkt: $\quad \boldsymbol{z}(t) := \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^*$

Linearisierung, d.h. man streicht $o(||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*||)$

Stabilitätsverhalten von $\boldsymbol{y}^*$ von $\boldsymbol{f}$ wird lokal beschrieben durch das Stabilitätsverhalten von $\boldsymbol{z}^* = \mathbf{0}$ mit

$$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{z} .$$

Stabilitätssatz III:

Gilt für die Eigenwerte λ_k von $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)$

a) $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$, dann ist $\boldsymbol{y}^*$ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt von $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$,

b) $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ für wenigstens ein k, dann ist $\boldsymbol{y}^*$ instabil.

Der qualitative Unterschied zu Stabilitätssatz II besteht darin, dass im Fall $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ hier keine Aussage gemacht wird.

Die Klassifikation für $n = 2$ wird in Anlehnung an den linearen Fall vorgenommen, wobei das qualitative Verhalten nur lokal gilt.

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2-9)(y+4)\,, \\ \dot{y} &= xy^2 - y^2 - 4x + 4\,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Lösung:

Die Gleichgewichtspunkte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2-9)(y+4) = (x-3)(x+3)(y+4)\,, \\ 0 &= xy^2 - y^2 - 4x + 4 = (x-1)(y^2-4)\,. \end{aligned}$$

Durch Fallunterscheidungen in der ersten Gleichung erhält man die Gleichgewichtspunkte:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2-9)(y+4) \\ (x-1)(y^2-4) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(y+4) & x^2-9 \\ y^2-4 & 2y(x-1) \end{pmatrix}$$

Klassifikation nach Stabilitätssatz III über Eigenwerte von $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(P_i)$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(3,2) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < \lambda_1 = 8 < \lambda_2 = 36$$

$\Rightarrow \quad P_1 \quad$ ist (lokal) ein instabiler Knotenpunkt 2. Art,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(3,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow -8 = \lambda_1 < 0 < \lambda_2 = 12$$

$\Rightarrow \quad P_2 \quad$ ist (lokal) ein instabiler Sattelpunkt,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(-3,2) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow -36 = \lambda_1 < \lambda_2 = -16 < 0$$

$\Rightarrow P_3$ ist (lokal) ein asymptotisch stabiler Knotenpunkt 2. Art,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(-3,-2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow -12 = \lambda_1 < 0 < \lambda_2 = 16$$

$\Rightarrow \quad P_4 \quad$ ist (lokal) ein instabiler Sattelpunkt,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(1,-4) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{96}\,,\ \lambda_2 = -i\sqrt{96}$$

$\Rightarrow \quad P_5 \quad$ ist nicht nach Stabilitätssatz III klassifizierbar