Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Lineare Systeme 1. Ordnung allgemein

DGl-Typ:

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x), \quad \boldsymbol{b}(x) \in \mathbb{R}^n \,,\ \boldsymbol{A}(x) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

homogenes lineares System 1. Ordnung, falls $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{0}$,

sonst ist das System **inhomogen**

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sind die Elemente von $\boldsymbol{A}(x)$ und $\boldsymbol{b}(x)$ stetig,

dann besitzt das **Anfangswertproblem**

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

genau eine Lösung.

Homogene lineare Systeme 1. Ordnung

Satz

Gegeben sei das **homogene System**

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}\ , \quad \boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}(x)$.

Dann gilt:

a) Das homogene System besitzt genau n linear unabhängige Lösungen

$$\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x)\ ,$$

die **Fundamentalsystem** genannt werden und eine **Basis** des Lösungensraumes bilden.

b) Darstellung der allgemeinen Lösung des homogenen Systems durch das Fundamentalsystem mit $c_i \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1\boldsymbol{y}^1(x) + \cdots + \mathbf{c}_n\boldsymbol{y}^n(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}$$

mit $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ und der **Fundamentalmatrix** $\boldsymbol{Y}(x) := \big(\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x)\big)$

c) Die Lösungen $\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x)$ des homogenen Systems bilden genau dann ein Fundamentalsystem,

wenn für die **Wronski-Determinante** und ein x_0 gilt

$$W(x_0) := \det \boldsymbol{Y}(x_0) \neq 0$$

Variation der Konstanten zur Lösung des inhomogenen Systems

Lösungsansatz

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$$

$\mathbf{c}(x)$ vektorwertigen Funktion und $\boldsymbol{Y}(x)$ Fundamentalsystem

In die inhomogene Differentialgleichung einsetzen:

$$\boldsymbol{Y}'(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{b}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Zunächst werden die Komponenten von $\mathbf{c}'(x)$ durch Lösen des Gleichungssystems bestimmt.

Anschließende Integration ergibt $\mathbf{c}(x)$.

Dann ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems berechnet

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)\,.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems mit den obigen Bezeichnungen lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\left(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}(x)\right)\,.$$

Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei das **homogene lineare System**

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

mit konstanter Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $a_{ij}(x) \in \mathbb{R}$.

Lösungen des homogenen Systems

Speziellen Ansatz $\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{v} \neq 0$

in die Differentialgleichung eingesetzen

$$\lambda e^{\lambda x}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}e^{\lambda x}\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda x}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ über das

charakteristische Polynom

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0.$$

Berechnung von Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ zu λ über die Gleichung

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Die Eigenwerte λ mit zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$

führen auf Lösungen $\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ des homogenen Systems.

1. Fall: $\boldsymbol{A}$ ist diagonalisierbar nur mit reellen Eigenwerten

Für verschiedene Eigenwerte λ stimmen
algebraische Vielfachheit $a(\lambda)$ und
geometrische Vielfachheit $g(\lambda)$ überein,
d.h es gibt n linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^i$
zu den eventuell mehrfach auftretenden Eigenwerten λ_i.

$\boldsymbol{A}$ kann durch $\boldsymbol{S}$ auf Diagonalgestalt $\boldsymbol{D}$ transformiert werden

$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{SD} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$$

mit $\boldsymbol{S} := \left(\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^n\right)$, $\boldsymbol{D} := \operatorname{diag}(\lambda_i)$.

Ein Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{Y}(x) = \left(e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n x}\boldsymbol{v}^n\right)$$

und die allgemeine reelle Lösung $\boldsymbol{y}_h(x)$ dann durch:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c} = c_1 e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}^1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}\boldsymbol{v}^n \; .$$

Diese Lösungsdarstellung kann im Allgemeinen auch
komplexwertige Eigenwerte- und vektoren ergeben.

2. Fall:

$\boldsymbol{A}$ ist diagonalisierbar auch mit komplexen Eigenwerten

Ist $\lambda_k = \alpha + i\beta$ echt komplexwertig, d.h. $\beta =\mathrm{Im}(\lambda_k) \neq 0$, dann ist der zugehörige Eigenvektor $\boldsymbol{v}^k$ echt komplexwertig und auch $\bar{\lambda}_k$ ist Eigenwert mit Eigenvektor $\bar{\boldsymbol{v}}^k$.

Die beiden linear unabhängigen und konjugiert komplexen Lösungen lauten

$$e^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}^k =: \boldsymbol{u}(x) + i\boldsymbol{v}(x)\ , \quad e^{\bar{\lambda}_k x}\bar{\boldsymbol{v}}^k = \boldsymbol{u}(x) - i\boldsymbol{v}(x)$$

Sie können im Fundamentalsystem ersetzt werden durch die beiden linear unabhängigen und reellwertigen Lösungen

$$\boldsymbol{u}(x) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}^i\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}(x) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}^i\right),$$

denn Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}^k)+\frac{1}{2}(e^{\bar{\lambda}_k x}\bar{\boldsymbol{v}}^k) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}(x)+i\boldsymbol{v}(x)+\boldsymbol{u}(x)-i\boldsymbol{v}(x)) = \boldsymbol{u}(x)$$

$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}^k)-\frac{1}{2i}(e^{\bar{\lambda}_k x}\bar{\boldsymbol{v}}^k) = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{u}(x)+i\boldsymbol{v}(x)-(\boldsymbol{u}(x)-i\boldsymbol{v}(x))) = \boldsymbol{v}(x).$$

Gegeben sei das **inhomogene lineare System**

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)\,, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

mit konstanter reellwertiger Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$
und stetigen $b_i(x)$ für $i, j = 1, \ldots, n$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x)\,.$$

Eine spezielle Lösung $\boldsymbol{y}_p(x)$ des inhomogenen Systems ergibt sich wieder über **Variation der Konstanten**.

Besitzt die Inhomogenität eine spezielle Gestalt können **spezielle Ansätze** zur inhomogenen Lösung führen.

Aufgabe 17:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 \\ &= (\lambda+2)(\lambda+4) = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -4$

Eigenvektoren:

zu $\lambda_1 = -2$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = -4$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Man berechne eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems.

Mit dem Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$$

führt Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ auf

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-2x} & e^{-4x} & 3x-1 \\ e^{-2x} & -e^{-4x} & 6-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} e^{-2x} & e^{-4x} & 3x-1 \\ 0 & -2e^{-4x} & 7-4x \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} (x+5/2)e^{2x} \\ (2x-7/2)e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y}_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Mit der Anfangsvorgabe erhält man

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + 2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2+1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2-i.$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2 + i$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-(2+i) & 1 & 0 \\ -1 & 2-(2+i) & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt: $\lambda_2 = 2 - i = \bar{\lambda}_1$ und $\boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung
der homogenen Differentialgleichung
in komplexer Darstellung mit $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{y}(x) = d_1 e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + d_2 e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Für die allgemeine reelle Lösung muss $e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 = e^{\bar{\lambda}_2 x}\bar{\boldsymbol{v}}_2$
in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$
\begin{aligned}
& e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 \\
= \; & e^{(2+i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \; = \; e^{2x}(\cos x + i\sin x)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
= \; & e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + ie^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet:

$$\boldsymbol{y}_h(x) \; = \; c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man hier über einen Ansatz der Form

$$\boldsymbol{y}_p(x) = e^{3x}\mathbf{c}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\boldsymbol{y}_p' = 3e^{3x}\mathbf{c} = e^{3x}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{c} \; + e^{3x}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Man erhält $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$\boldsymbol{y}(x) \; = \; c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

3. Fall: $\boldsymbol{A}$ ist nicht diagonalisierbar

In diesem Fall existieren nur m $(< n)$ linear unabhängige Eigenvektoren, so dass die auf Diagonalgestalt transformierende Matrix $\boldsymbol{S}$ nicht existiert.

Ersatzweise kann man noch eine Matrix $\boldsymbol{S}$ finden, die $\boldsymbol{A}$ auf Jordansche Normalform $\boldsymbol{J}$ transformiert

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\,.$$

Mehrfach auftretende Eigenwerte λ_i werden dabei zusammenhängend numeriert. In den Spalten von $\boldsymbol{S}$ stehen wieder die linear unabhängigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{i1}$ mit $i = 1, \ldots, m$ und die übrigen $n-m$ Spalten werden in folgender Weise durch Hauptvektoren aufgefüllt

$$\boldsymbol{S} := \left(\boldsymbol{v}^{11},\ \underbrace{\boldsymbol{v}^{12}, \ldots, \boldsymbol{v}^{1r_1}}_{\text{Hauptvektoren}} \middle| \ldots, \middle| \boldsymbol{v}^{m1}, \underbrace{\boldsymbol{v}^{m2}, \ldots, \boldsymbol{v}^{mr_m}}_{\text{Hauptvektoren}} \right) \quad .$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{v}^{i2}, \ldots, \boldsymbol{v}^{ir_i}$ die ggf. zu $\boldsymbol{v}^{i1}$ gehörige Kette von Hauptvektoren $1, \ldots, (r_i - 1)$-ter Stufe.

Dieser Fall kann jedoch nur dann auftreten, wenn die geometrische Vielfachheit von λ_i kleiner ist als die algebraische.

Die Spalten des Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ werden wie im 1. Fall gebildet, mit dem Unterschied, dass im Falle einer auftretenden Kette Eigenvektor mit zugehörigen Hauptvektoren die Spaltenvektoren

$$e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}^{i1}, e^{\lambda_i x}\left(\frac{x}{1!}\boldsymbol{v}^{i1} + \boldsymbol{v}^{i2}\right), \ldots, e^{\lambda_i x}\left(\frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!}\boldsymbol{v}^{i1} + \cdots + \frac{x}{1!}\boldsymbol{v}^{ir_{i-1}} + \boldsymbol{v}^{ir_i}\right)$$

in $\boldsymbol{Y}(x)$ aufgenommen werden.

Aufgabe 18:

Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (3-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3\,, \quad \lambda_{2,3} = -1$$

Berechnung der zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $1 = g(\lambda_{2,3}) < a(\lambda_{2,3}) = 2$ gilt, ist ein Hauptvektor 1. Stufe über den Ansatz $(\boldsymbol{A} - \lambda_{2,3}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^3 = \boldsymbol{v}^2$ zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$\boldsymbol{y}^1(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}^2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}^3(x) = e^{-x} \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit allgemeinen Koeffizienten:

DGl-Typ:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = h(x),$$

$a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x), h(x)$ seien stetige Funktionen

Umformulierung in ein System 1. Ordnung:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \\ \vdots \\ \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}'}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \\ \vdots \\ \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Lösungen der homogenen Gleichung durch Reduktion der Ordnung:

Angenommen eine Lösung $u(x)$ ist bekannt,

dann kann durch den Ansatz

$$y(x) = u(x) \cdot z(x)$$

die homogene Differentialgleichung um eine Ordnung reduziert werden.

Beispiel $n = 2$: $\qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Einsetzen von $y = uz$ in die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} 0 &= u''z + 2u'z' + uz'' + a_1(u'z + uz') + a_0 uz \\ &= uz'' + (2u' + a_1 u)z' + (\underbrace{u'' + a_1 u' + a_0 u}_{=0})z \\ &= uz'' + (2u' + a_1 u)z' \quad \text{mit } z' = w \\ &= uw' + (2u' + a_1 u)w \,. \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung 1. Ordnung in w wird gelöst.

Anschließend ergibt sich z durch Integration

und damit dann das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = u(x) \,,\; y_2(x) = u(x)z(x) \,.$$

Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen Gleichung:

Schreibt man die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

mit dem **Fundamentalsystem** $y_1, \ldots, y_n$

um in ein System 1.Ordnung, so kann für das System

die Methode der Variation der Konstanten ($\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$) angewendet werden.

Die Bestimmungsgleichung für $\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$ lautet dann

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Y}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Aufgabe 19:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = -18\ .$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax+b$.

Polynomiale Lösung $u(x) = ax + b$ einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + \frac{4a}{x} - \frac{4(ax+b)}{x^2} \quad \Rightarrow \\ 0 &= 4ax - 4(ax+b) = -4b \quad \Rightarrow \quad b = 0\ ,\ a \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Wählt man $a = 1$ ergibt sich die Lösung $u(x) = x$.

Reduktionsansatz für eine weitere linear unabhängige Lösung:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x)\ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
0 &= u''z + 2u'z' + uz'' + \frac{4}{x}(u'z + uz') - \frac{4}{x^2}uz \\
0 &= uz'' + (2u' + \frac{4u}{x})z' + \underbrace{(u'' + \frac{4}{x}u' - \frac{4}{x^2}u)}_{=0}z \\
0 &= xz'' + (2 + 4x/x)z' = xw' + 6w \quad \text{mit } w = z' \,.
\end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung $xw' + 6w = 0$ wird durch Separation gelöst:

$$\int \frac{dw}{w} = -\int \frac{6dx}{x} \quad \Rightarrow \quad w(x) = x^{-6} = z'(x)$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = -\frac{1}{5x^5} \,.$$

Die weitere linear unabhängige Lösung aus dem Reduktionsansatz lautet daher:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x) = -x \cdot \frac{1}{5x^5} = -\frac{1}{5}x^{-4} \,.$$

Als Fundamentalsystem kann also gewählt werden:

$$y_1(x) = x \,,\; y_2(x) = x^{-4}$$

b) Man schreibe die Differentialgleichung um
in ein System erster Ordnung und
berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung
unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Umschreiben in ein System mit zugehöriger Fundamentalmatrix:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{4}{x^2} & -\dfrac{4}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -18 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(x)}$$

Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} .$$

Variation der Konstanten: $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$
Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$

$$\begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{18}{5} \\ \dfrac{18x^5}{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{18x}{5} \\ \dfrac{18x^6}{30} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{18x}{5} \\ \dfrac{18x^6}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ -6x \end{pmatrix}$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann daher $y_p(x) = -3x^2$ gewählt werden.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet

$$y(x) = -3x^2 + c_1 x + c_2 x^{-4} \,.$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

DGl-Typ:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = h(x),$$

$h(x)$ sei eine stetige Funktion und $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$

Lösungen der homogenen Gleichung:

Der Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ eingesetzt in die homogene Gleichung ergibt die **charakteristische Gleichung**

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

mit deren Nullstellen die folgenden linear unabhängigen Lösungen gebildet werden:

a) für jede reelle Nullstelle λ_k der Vielfachheit r_k

$$e^{\lambda_k x}\,, \quad x \cdot e^{\lambda_k x}\,, \quad x^2 \cdot e^{\lambda_k x}\,, \ldots, \; x^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}\,,$$

b) die unter a) angegebene Darstellung gilt prinzipiell auch für komplexe Nullstellen $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert dann die reellen Lösungen

$$e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,, \quad x e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,, \ldots, x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,,$$

$$e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,, \quad x e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,, \ldots, x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,.$$

Superposition

der linear unabhängigen Lösungen mit $y_1(x), \ldots, y_n(x)$

ergibt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \; .$$

Lösungsmethoden für die inhomogene Gleichung:

Spezielle Ansätze:

Besitzt die Inhomogenität $h(x)$ eine spezielle Gestalt, so erzeugen mitunter Lösungsansätze der gleichen Form eine partikuläre Lösung $y_p(x)$:

Beispiel:

$$h(x) = e^{\mu x}(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)$$
$$y_p(x) = e^{\mu x}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0), \qquad \text{falls } \mu \neq \lambda_k$$
$$y_p(x) = x^{r_k} e^{\mu x}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0), \quad \text{falls } \mu = \lambda_k$$

Dabei sind λ_k die Lösungen der charakteristischen Gleichung mit Vielfachheit r_k.

Methode der Greenschen Funktion (Grundlösungsverfahren)

Die Funktion $w(x)$ löse die homogene Anfangswertaufgabe:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0$$

mit

$$0 = y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-2)}(x_0) \quad \text{und } y^{(n-1)}(x_0) = 1\ .$$

Man definiert die **Greensche Funktion**:

$$G(x,\xi) := w(x - \xi + x_0)$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = h(x)$$

ist dann gegeben durch

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,\xi) \cdot h(\xi)\, d\xi\ .$$

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Nullstellen $\lambda_1 = -4\,, \lambda_2 = -1$

Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^{-4x}\;,\; y_2(x) = e^{-x}\,.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Für die polynomiale Inhomogenität kann hier der Ansatz

$$y_p(x) = ax + b$$

verwendet werden.

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$5a + 4(ax + b) = 4ax + 5a + 4b \stackrel{!}{=} 4x - 3\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$a = 1\,,\; b = -2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = x - 2.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + x - 2\,.$$

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4x - 3 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom $\quad p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4,$

Eigenwerte $\quad \lambda_1 = -4\,, \quad \lambda_2 = -1$

zugehörige Eigenvektoren

$\boldsymbol{v}_1 = (1, -4)^T \quad$ und $\quad \boldsymbol{v}_2 = (1, -1)^T$

Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

(i) Man berechne eine spezielle Lösung des Systems unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Der Ansatz der Variation der Konstanten
$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung führt auf
das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x-3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} & 4x-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & 3e^{-x} & 4x-3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(4x-3)e^{4x}/3 \\ (4x-3)e^{x}/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x-1)e^{4x}/3 \\ (4x-7)e^{x}/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(x-1)e^{4x}/3 \\ (4x-7)e^{x}/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Man berechne eine spezielle Lösung des Systems unter Verwendung der Methode der Greenschen Funktion.

Die Greensche Funktion des Grundlösungsverfahrens wird bestimmt über die Lösung $w(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}(0)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad w(x) = -\frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad G(x, \tau) = -\frac{1}{3}e^{-4(x-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-(x-\tau)}$$

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \int\limits_0^x G(x,\tau)h(\tau)\,d\tau \\
&= \int\limits_0^x \left(-\frac{1}{3}e^{-4(x-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-(x-\tau)}\right)(4\tau-3)\,d\tau \\
&= \frac{1}{3}\left(-e^{-4x}\int\limits_0^x e^{4\tau}(4\tau-3)\,d\tau + e^{-x}\int\limits_0^x e^{\tau}(4\tau-3)\,d\tau\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-e^{-4x}\,(\tau-1)e^{4\tau}\Big|_0^x + e^{-x}\,(4\tau-7)e^{\tau}\Big|_0^x\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-e^{-4x}\left((x-1)e^{4x}+1\right) + e^{-x}\left((4x-7)e^{x}+7\right)\right) \\
&= x-2-\frac{1}{3}e^{-4x}+\frac{7}{3}e^{-x}
\end{aligned}$$

Erwartungsgemäß stimmt die erste Komponente der allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der aus a) überein und die zweite mit deren Ableitung.