Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Lineare Systeme 1. Ordnung allgemein

DGl-Typ:

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x), \quad \boldsymbol{b}(x) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \boldsymbol{A}(x) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Ist $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{0}$ handelt es sich um ein **homogenes** lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, sonst ist das System **inhomogen**.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sind die Elemente von $\boldsymbol{A}(x)$ und die Komponenten der rechten Seite $\boldsymbol{b}(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$ und $b_i(x)$ für $i, j = 1, \ldots, n$ stetig in einem Intervall $]a, b[$, dann besitzt das **Anfangswertproblem**

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

für beliebig vorgegebene $x_0 \in]a, b[$ und $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung in $]a, b[$.

Homogene lineare Systeme 1. Ordnung

Satz

Gegeben sei das **homogene System**

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}\ , \quad \boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}(x)$ im Intervall $]a, b[$.

Dann gilt:

a) Das homogene System besitzt in $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen

$$\boldsymbol{y}^1(x), \dots, \boldsymbol{y}^n(x) \,,$$

die **Fundamentalsystem** genannt werden.

b) Die Lösungen des homogenen Systems bilden einen Vektorraum und das Fundamentalsystem ist eine **Basis** dieses Vektorraumes.

c) Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lässt sich als Linearkombination mit dem Fundamentalsystem darstellen:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1 \boldsymbol{y}^1(x) + \cdots + \mathbf{c}_n \boldsymbol{y}^n(x) \,, \quad c_i \in \mathbb{R} \,(\text{bzw. } \mathbb{C}).$$

Mit der **Fundamentalmatrix** $\boldsymbol{Y}(x) := (\boldsymbol{y}^1(x), \dots, \boldsymbol{y}^n(x))$ erhält man

$$\boldsymbol{y}_h(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}$$

mit $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$.

d) Für die **Wronski-Determinante** $W(x) := \det \boldsymbol{Y}(x)$ gilt $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$, d.h Lösungen $\boldsymbol{y}^1(x), \dots, \boldsymbol{y}^n(x)$ des homogenen Systems bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn für ein $x_0 \in]a, b[$ gilt $W(x_0) \neq 0$.

Variation der Konstanten zur Lösung des inhomogenen Systems

In Analogie zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung wird mit einer noch zu bestimmenden vektorwertigen Funktion $\mathbf{c}(x)$ und dem Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ der Lösungsansatz $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$\boldsymbol{Y}'(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{b}(x) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x) \,.$$

Zunächst werden die Komponenten von $\mathbf{c}'(x)$ durch Lösen des rechtsstehenden Gleichungssystems bestimmt. Anschließende Integration ergibt $\mathbf{c}(x)$.

Damit lautet eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) \,.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems mit den obigen Bezeichnungen lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\left(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}(x)\right) \,.$$

Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei das **homogene lineare System**

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

mit konstanter Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $a_{ij}(x) \in \mathbb{R}$.

Lösungen des homogenen Systems

Wenn der spezielle Ansatz $\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{v} \neq 0$ in die Differentialgleichung eingesetzt wird, erhält man

$$\lambda e^{\lambda x}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}e^{\lambda x}\boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda x}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ über das **charakteristische Polynom**

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0.$$

Berechnung von Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ zu λ über folgende Gleichung

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Damit führen die Eigenwerte λ mit zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ auf Lösungen $\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ des homogenen Systems.

1. Fall: $\boldsymbol{A}$ ist diagonalisierbar nur mit reellen Eigenwerten

Für verschiedene Eigenwerte λ stimmen algebraische Vielfachheit $a(\lambda)$ und geometrische Vielfachheit $g(\lambda)$ überein, d.h es gibt n linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^i$ zu den eventuell mehrfach auftretenden Eigenwerten λ_i.

$\boldsymbol{A}$ kann auf Diagonalgestalt $\boldsymbol{D}$ durch $\boldsymbol{S}$ transformiert werden

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{D} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{S} := \left(\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^n\right), \quad \boldsymbol{D} := \operatorname{diag}(\lambda_i)\,.$$

Ein Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ bzw. die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(x)$ ist dann gegeben durch:

$$\boldsymbol{Y}(x) = \left(e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n x}\boldsymbol{v}^n\right), \quad \boldsymbol{y}_h(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c} = c_1 e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}^1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}\boldsymbol{v}^n\,.$$

Diese Lösungsdarstellung wird im Allgemeinen komplexwertig sein.

Sind alle Eigenwerte λ_i reell, dann können reelle Eigenvektoren berechnet werden und das Fundamentalsystem ist reell.

2. Fall: $\boldsymbol{A}$ ist diagonalisierbar auch mit komplexen Eigenwerten

Ist $\lambda_k = \alpha + i\beta$ echt komplexwertig, d.h. $\beta = \mathrm{Im}(\lambda_k) \neq 0$, dann ist der zugehörige Eigenvektor $\boldsymbol{v}^k$ echt komplexwertig und auch $\bar{\lambda}_k$ ist Eigenwert mit Eigenvektor $\bar{\boldsymbol{v}}^k$.

Die beiden linear unabhängigen und konjugiert komplexen Lösungen

$$e^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}^k =: \boldsymbol{u}(x) + i\boldsymbol{v}(x)\,, \quad e^{\bar{\lambda}_k x}\bar{\boldsymbol{v}}^k = \boldsymbol{u}(x) - i\boldsymbol{v}(x)$$

aus dem Fundamentalsystem können ersetzt werden durch die beiden linear unabhängigen und reellwertigen Lösungen

$$\boldsymbol{u}(x) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}^i\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}(x) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}^i\right),$$

denn Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}^k) + \frac{1}{2}(e^{\bar{\lambda}_k x}\bar{\boldsymbol{v}}^k) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}(x) + i\boldsymbol{v}(x) + \boldsymbol{u}(x) - i\boldsymbol{v}(x)) = \boldsymbol{u}(x)$$

und

$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}^k) - \frac{1}{2i}(e^{\bar{\lambda}_k x}\bar{\boldsymbol{v}}^k) = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{u}(x) + i\boldsymbol{v}(x) - (\boldsymbol{u}(x) - i\boldsymbol{v}(x))) = \boldsymbol{v}(x)\,.$$

Gegeben sei das **inhomogene lineare System**

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)\,, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

mit konstanter reellwertiger Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und stetigen $b_i(x)$ für $i, j = 1, \ldots, n$ in einem Intervall $]a, b[$.

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet auch hier

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x)\,.$$

Eine spezielle Lösung $\boldsymbol{y}_p(x)$ des inhomogenen Systems lässt sich wieder über Variation der Konstanten berechnen.

Besitzt die Inhomogenität eine spezielle Gestalt können auch geeignete an die Inhomogenität angepasste Ansätze zur Lösung führen.

Aufgabe 17:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne

(i) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,

(ii) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems und

(iii) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems eignet sich hier der Ansatz $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{3x}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:

a) (i) Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -4$

Eigenvektoren:

zu $\lambda_1 = -2$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_2 = -4$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Mit dem Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}$ führt Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ auf

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-2x} & e^{-4x} & 3x-1 \\ e^{-2x} & -e^{-4x} & 6-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} e^{-2x} & e^{-4x} & 3x-1 \\ 0 & -2e^{-4x} & 7-4x \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} (x+5/2)e^{2x} \\ (2x-7/2)e^{4x} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y}_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x/2+1)e^{2x} \\ (x/2-1)e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Mit der Anfangsvorgabe erhält man

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} + 2e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

b) Berechnung der Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2+i, \quad \lambda_2 = 2-i\,.$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2+i: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2-(2+i) & 1 & 0 \\ -1 & 2-(2+i) & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt $\lambda_2 = 2 - i = \bar{\lambda}_1$ und $\boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in komplexer Darstellung mit $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{y}(x) = d_1 e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + d_2 e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Für die allgemeine reelle Lösung muss $e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 = e^{\bar{\lambda}_2 x}\bar{\boldsymbol{v}}_2$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1 &= e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{2x}(\cos x + i \sin x)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + ie^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man hier über einen Ansatz der Form $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{3x}\mathbf{c}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\boldsymbol{y}_p' = 3e^{3x}\mathbf{c} = e^{3x} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{c} + e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Man erhält $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$\boldsymbol{y}(x) \;=\; c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Fall: $\boldsymbol{A}$ ist nicht diagonalisierbar

In diesem Fall existieren nur m $(< n)$ linear unabhängige Eigenvektoren, so dass die auf Diagonalgestalt transformierende Matrix $\boldsymbol{S}$ nicht existiert. Ersatzweise kann man noch eine Matrix $\boldsymbol{S}$ finden, die $\boldsymbol{A}$ auf Jordansche Normalform $\boldsymbol{J}$ transformiert

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\,.$$

Mehrfach auftretende Eigenwerte λ_i werden dabei zusammenhängend numeriert. In den Spalten von $\boldsymbol{S}$ stehen wieder die linear unabhängigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{i1}$ mit $i = 1, \ldots, m$ und die übrigen $n - m$ Spalten werden in folgender Weise durch Hauptvektoren aufgefüllt

$$\boldsymbol{S} := \left(\boldsymbol{v}^{11},\ \underbrace{\boldsymbol{v}^{12}, \ldots, \boldsymbol{v}^{1r_1}}_{\text{Hauptvektoren}} \middle| , \ldots , \middle| \boldsymbol{v}^{m1},\ \underbrace{\boldsymbol{v}^{m2}, \ldots, \boldsymbol{v}^{mr_m}}_{\text{Hauptvektoren}} \right).$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{v}^{i2}, \ldots, \boldsymbol{v}^{ir_i}$ die ggf. zu $\boldsymbol{v}^{i1}$ gehörige Kette von Hauptvektoren $1, \ldots, (r_i - 1)$-ter Stufe. Dieser Fall kann jedoch nur dann auftreten, wenn die geometrische Vielfachheit von λ_i kleiner ist als die algebraische.

Die Spalten des Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ werden wie im 1. Fall gebildet, mit dem Unterschied, dass im Falle einer auftretenden Kette Eigenvektor mit zugehörigen Hauptvektoren die Spaltenvektoren

$$e^{\lambda_i x}\boldsymbol{v}^{i1}\,,\; e^{\lambda_i x}\left(\frac{x}{1!}\boldsymbol{v}^{i1} + \boldsymbol{v}^{i2}\right)\,, \ldots ,\; e^{\lambda_i x}\left(\frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!}\boldsymbol{v}^{i1} + \cdots + \frac{x}{1!}\boldsymbol{v}^{ir_{i-1}} + \boldsymbol{v}^{ir_i}\right)$$

in $\boldsymbol{Y}(x)$ aufgenommen werden.

Aufgabe 18:

Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Lösung:

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (3-\lambda)(\lambda+1)^2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 3,\; \lambda_{2,3} = -1 \,. \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Da $1 = g(\lambda_{2,3}) < a(\lambda_{2,3}) = 2$ gilt, ist ein Hauptvektor 1. Stufe über den Ansatz $(\boldsymbol{A} - \lambda_{2,3}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}^3 = \boldsymbol{v}^2$ zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$\boldsymbol{y}^1(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}^2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}^3(x) = e^{-x} \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit allgemeinen Koeffizienten:

DGl-Typ:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = h(x),$$

$a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x), h(x)$ seien stetige Funktionen

Umformulierung in ein System 1. Ordnung:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = h(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \\ \vdots \\ \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}'}_{\boldsymbol{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \\ \vdots \\ \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Lösungen der homogenen Gleichung durch Reduktion der Ordnung der Differentialgleichung n-ter Ordnung:

Angenommen eine Lösung $u(x)$ ist bekannt, dann kann durch den Ansatz

$$y(x) = u(x) \cdot z(x)$$

die homogene Differentialgleichung um eine Ordnung reduziert werden.

Beispiel $n = 2$: $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Einsetzen von $y = uz$ in die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} 0 &= u''z + 2u'z' + uz'' + a_1(u'z + uz') + a_0 uz \\ &= uz'' + (2u' + a_1 u)z' + (\underbrace{u'' + a_1 u' + a_0 u}_{=0})z \\ &= uz'' + (2u' + a_1 u)z' \quad \text{mit } z' = w \\ &= uw' + (2u' + a_1 u)w\,. \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung 1. Ordnung in w wird gelöst. Anschließend ergibt sich z durch Integration und damit dann das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = u(x)\,,\ y_2(x) = u(x)z(x)\,.$$

Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen Gleichung:

Die Berechnung einer speziellen inhomogenen Lösung $y_p(x)$ der linearen Einzelgleichung n-ter Ordnung kann über Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ beim System erster Ordnung und lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$ erfolgen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Y}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(x)} .$$

Aufgabe 19:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = -18 .$$

a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.

   Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax + b$.

b) Man schreibe die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung und berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Lösung:

a) Die Koeffizienten der polynomialen Lösung $u(x) = ax + b$ ergeben sich durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + \frac{4a}{x} - \frac{4(ax+b)}{x^2} \quad \Rightarrow \\ 0 &= 4ax - 4(ax+b) = -4b \quad \Rightarrow \quad b = 0\,,\ a \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   Wählt man $a = 1$ ergibt sich die Lösung $u(x) = x$.

   Reduktionsansatz für eine weitere linear unabhängige Lösung:

$$y(x) = u(x) \cdot z(x)\,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$
\begin{aligned}
0 &= u''z + 2u'z' + uz'' + \frac{4}{x}(u'z + uz') - \frac{4}{x^2}uz \\
0 &= uz'' + (2u' + \frac{4u}{x})z' + \underbrace{(u'' + \frac{4}{x}u' - \frac{4}{x^2}u)}_{=0}z \\
0 &= xz'' + (2 + 4x/x)z' \;=\; xw' + 6w \qquad \text{mit } w = z' \,.
\end{aligned}
$$

Die resultierende Differentialgleichung $xw' + 6w = 0$ wird durch Separation gelöst:

$$
\int \frac{dw}{w} = -\int \frac{6dx}{x} \quad \Rightarrow \quad w(x) = x^{-6} = z'(x) \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\frac{1}{5x^5} \,.
$$

Die weitere linear unabhängige Lösung aus dem Reduktionsansatz lautet daher:

$$
y(x) = u(x) \cdot z(x) = -x \cdot \frac{1}{5x^5} = -\frac{1}{5}x^{-4} \,.
$$

Als Fundamentalsystem kann also $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^{-4}$ gewählt werden.

b) Umschreiben in ein System mit zugehöriger Fundamentalmatrix:

$$
\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{x^2} & -\frac{4}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -18 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(x)} \leftrightarrow \boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} .
$$

Ansatz für Variation der Konstanten:
$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$

$$
\begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ \frac{18x^5}{5} \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18x}{5} \\ \frac{18x^6}{30} \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^{-4} \\ 1 & -4x^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{18x}{5} \\ \frac{18x^6}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ -6x \end{pmatrix}
$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann daher $y_p(x) = -3x^2$ gewählt werden.

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lautet

$$
y(x) = -3x^2 + c_1 x + c_2 x^{-4} \,.
$$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

DGl-Typ: $\quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = h(x),$

$h(x)$ sei eine stetige Funktion und $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$

Lösungen der homogenen Gleichung:

Der Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ eingesetzt in die homogene Gleichung ergibt die **charakteristische Gleichung**

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

mit deren Nullstellen die folgenden linear unabhängigen Lösungen gebildet werden:

a) für jede reelle Nullstelle λ_k der Vielfachheit r_k

$$e^{\lambda_k x}\,, \quad x \cdot e^{\lambda_k x}\,, \quad x^2 \cdot e^{\lambda_k x}\,, \ldots,\; x^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k x}\,,$$

b) die unter a) angegebene Darstellung gilt prinzipiell auch für komplexe Nullstellen $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert dann die reellen Lösungen

$$e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,, \quad x e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,, \ldots, x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x)\,,$$
$$e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,, \quad x e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,, \ldots, x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x)\,.$$

Werden die linear unabhängigen Lösungen mit $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ bezeichnet, so ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wiederum durch **Superposition**

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,.$$

Lösungsmethoden für die inhomogene Gleichung:

Spezielle Ansätze:

Besitzt die Inhomogenität $h(x)$ eine spezielle Gestalt, so erzeugen mitunter Lösungsansätze der gleichen Form eine partikuläre Lösung $y_p(x)$:

Beispiel:

$h(x) = e^{\mu x}(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)$

$y_p(x) = e^{\mu x}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0), \qquad$ falls $\mu \neq \lambda_k$

$y_p(x) = x^{r_k} e^{\mu x}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0), \quad$ falls $\mu = \lambda_k$

Dabei sind λ_k die Lösungen der charakteristischen Gleichung mit Vielfachheit r_k.

Methode der Greenschen Funktion (Grundlösungsverfahren):

Die Funktion $w(x)$ löse die homogene Anfangswertaufgabe:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0$$

mit $0 = y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-2)}(x_0)$ und $y^{(n-1)}(x_0) = 1$.

Man definiert die **Greensche Funktion**: $G(x,\xi) := w(x - \xi + x_0)$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = h(x)$$

ist dann gegeben durch

$$y_p(x) = \int\limits_{x_0}^{x} G(x,\xi) \cdot h(\xi)\, d\xi \,.$$

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3 \,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung

   (i) der Variation der Konstanten und

   (ii) der Methode der Greenschen Funktion.

Lösung:

a) Zunächst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 5y' + 4y = 0$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ liefern das Fundamentalsytem

$$y_1(x) = e^{-4x} \,,\ y_2(x) = e^{-x} \,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Für die polynomiale Inhomogenität kann hier der Ansatz

$$y_p(x) = ax + b$$

verwendet werden. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhält man

$$5a + 4(ax + b) = 4ax + 5a + 4b \stackrel{!}{=} 4x - 3\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a = 1$, $b = -2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + x - 2\,.$$

b)

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4x-3 \end{pmatrix}$$

Würde man das homogene System lösen, käme man auf das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, also auf die Eigenwerte $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = (1, -4)^T$ und $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1)^T$ und erhielte damit das Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Da wir aus a) für das System die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix}$$

schon kennen, verzichten wir hier auf die Berechnung des Eigensystems.

(i) Der Ansatz der Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung führt auf das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x-3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} & 4x-3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} e^{-4x} & e^{-x} & 0 \\ 0 & 3e^{-x} & 4x-3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(4x-3)e^{4x}/3 \\ (4x-3)e^{x}/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x-1)e^{4x}/3 \\ (4x-7)e^{x}/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_p(x) \\ y_p'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(x-1)e^{4x}/3 \\ (4x-7)e^{x}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Die Greensche Funktion des Grundlösungsverfahrens wird bestimmt über die Lösung $w(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}(0)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad w(x) = -\frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad G(x,\tau) = -\frac{1}{3}e^{-4(x-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-(x-\tau)}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x G(x,\tau)h(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^x \left(-\frac{1}{3}e^{-4(x-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-(x-\tau)}\right)(4\tau-3)\,d\tau \\ &= \frac{1}{3}\left(-e^{-4x}\int_0^x e^{4\tau}(4\tau-3)\,d\tau + e^{-x}\int_0^x e^{\tau}(4\tau-3)\,d\tau\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-e^{-4x}\,(\tau-1)e^{4\tau}\big|_0^x + e^{-x}\,(4\tau-7)e^{\tau}\big|_0^x\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-e^{-4x}\left((x-1)e^{4x}+1\right) + e^{-x}\left((4x-7)e^{x}+7\right)\right) \\ &= x-2-\frac{1}{3}e^{-4x}+\frac{7}{3}e^{-x} \end{aligned}$$

Erwartungsgemäß stimmt die erste Komponente der allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4x} & e^{-x} \\ -4e^{-4x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der aus a) überein und die zweite mit deren Ableitung.