Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Anfangswertaufgaben:

Gegeben sei die **Anfangswertaufgabe**

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0 \, ,$$

$f : D :=]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in D$.

Eulersches Polygonzug-Verfahren:

(konstante Schrittweite h)

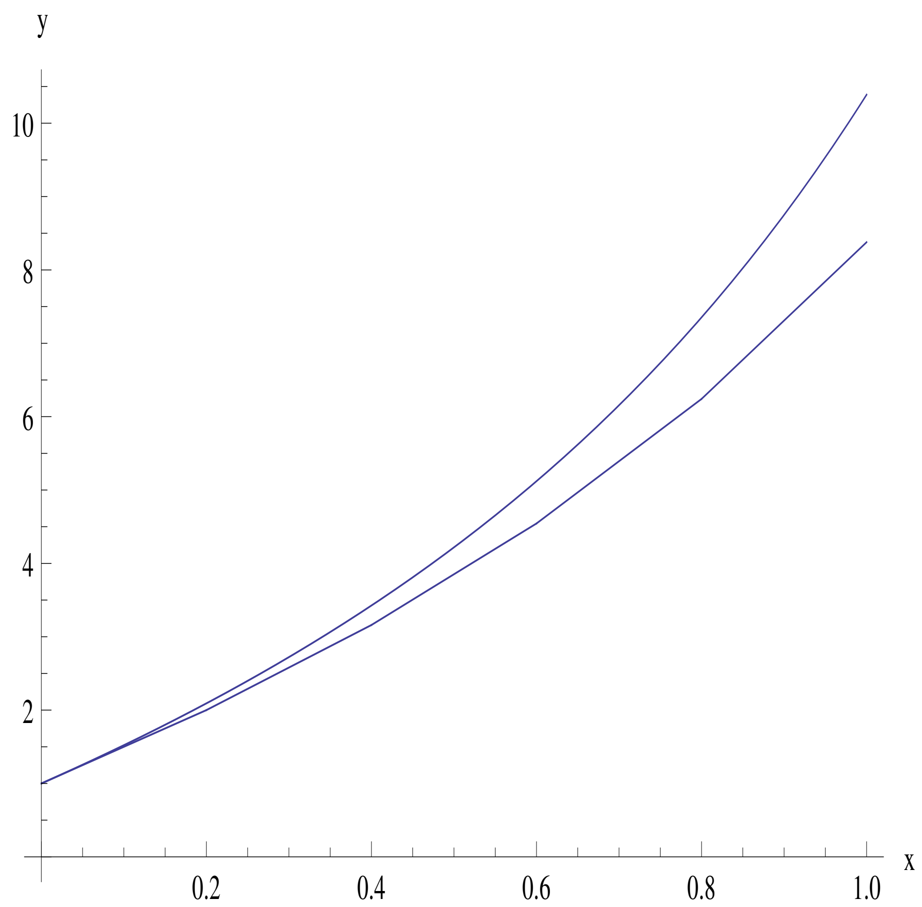

Bild $y(x)$ (oben) mit Polygonzug (unten)

$$\begin{aligned}
x_0 & & & , \quad y_0 & & \\
x_1 &= x_0 + h & & , \quad y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\
x_2 &= x_0 + 2h & & , \quad y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\
x_3 &= x_0 + 3h & & , \quad y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\
&\vdots & & & \vdots & \\
x_{i+1} &= x_0 + (i+1)h & & , \quad y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i)
\end{aligned}$$

Verfahren der sukzessiven Approximation:

$$\begin{aligned}
y^{[0]}(x) &= y_0 \\
y^{[1]}(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y^{[0]}(\xi)\right) d\xi \\
y^{[2]}(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y^{[1]}(\xi)\right) d\xi \\
&\vdots \\
y^{[k+1]}(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y^{[k]}(\xi)\right) d\xi
\end{aligned}$$

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3\,, \quad y(0) = 1\,.$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

$$y' = 2y - 6x + 3 =: f(x, y)$$

Eulerschen-Polygonzug-Verfahren mit Startwert
$x_0 = 0\,, \quad y(0) = y_0 = 1$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + h(2y_k - 6x_k + 3)$$

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0.0 & y_0 = 1.00000 \\
x_1 = 0.1 & y_1 = 1.0 + 0.1(2 \cdot 1.0 - 6 \cdot 0.0 + 3) = 1.50000 \\
x_2 = 0.2 & y_2 = 1.5 + 0.1(2 \cdot 1.5 - 6 \cdot 0.1 + 3) = 2.04000 \\
x_3 = 0.3 & y_3 = 2.62800 \\
x_4 = 0.4 & y_4 = 3.27360 \\
x_5 = 0.5 & y_5 = 3.98832 \approx y(0.5)
\end{array}$$

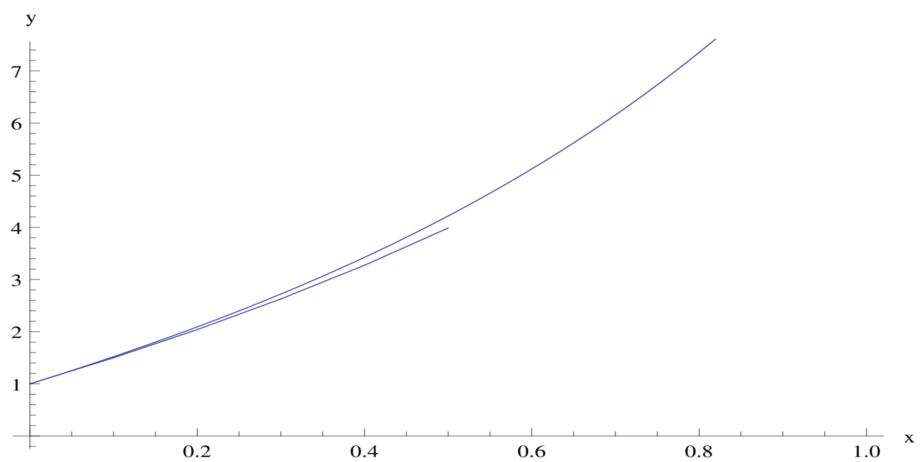

Bild 13 a) $y(x)$ mit Polygonzug

b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

Verfahren der sukzessiven Approximation mit Startwert $y^{[0]}(x) = y_0 = 1$

$$y^{[k+1]}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y^{[k]}(t))dt = 1 + \int_0^x 2y^{[k]}(t) - 6t + 3dt$$

$$\begin{aligned}
y^{[1]}(x) &= 1 + \int_0^x 2 - 6t + 3\,dt \\
&= 1 + 5x - 3x^2 \\
y^{[2]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t - 3t^2) - 6t + 3\,dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 - 2x^3 \\
y^{[3]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 - 2t^3) - 6t + 3\,dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 - x^4 \\
y^{[4]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 - t^4) - 6t + 3\,dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 - \tfrac{2}{5}x^5 \\
y^{[5]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{5}t^5) - 6t + 3\,dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{2}{15}x^6 \\
y^{[5]}(0.5) &= 4.214583333 \approx y(0.5)
\end{aligned}$$

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGl $y' = 2y$:

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2dx$$
$$\Rightarrow \quad y_h(x) = ce^{2x}$$

Eine spezielle Lösung der inh. DGl $y' - 2y = -6x + 3$:
Ansatz $y_p(x) = ax + b$ in DGl einsetzen

$$\Rightarrow \quad a - 2(ax + b) = -2ax + a - 2b = -6x + 3$$
$$\Rightarrow \quad y_p(x) = 3x$$

Die allgemeine Lösung der DGl $y' - 2y = -6x + 3$

$$y(x) = ce^{2x} + 3x$$

Mit $y(0) = 1$ erhält man die Lösung der AWA

$$1 = y(0) = ce^{2\cdot 0} + 3 \cdot 0 = c \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{2x} + 3x$$

und den Funktionswert an der Stelle $x = 0.5$

$$y(0.5) = e + 1.5 = 4.2182818...$$

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an,

vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und

zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 3x + e^{2x} \\
&= 3x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 \\
&\quad + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k
\end{aligned}
$$

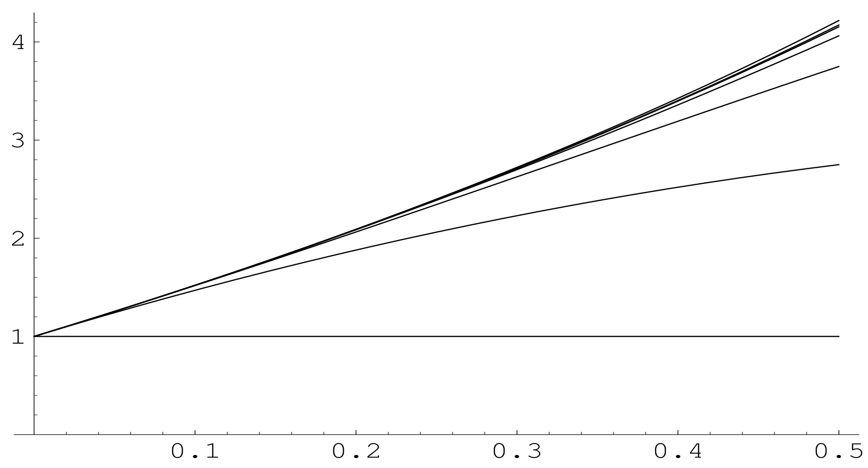

Bild 13 b) $y(x), y^{[0]}(x), \ldots, y^{[5]}(x)$

Existenzsatz von Peano:

Gegeben sei $f : D :=]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$

und die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0 \ ,$$

Ist f stetig auf D und $(x_0, y_0) \in D$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Anfangswertaufgabe eine Lösung $y(x)$ im Intervall $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ besitzt.

Lipschitz-Bedingung:

f erfüllt im abgeschlossenen Quader Q

eine **Lipschitz-Bedingung** bzgl. y

mit der **Lipschitz-Konstanten** $L \geq 0$,

falls für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in D$ gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \ .$$

Ist f eine stetig partiell nach y differenzierbare Funktion, dann kann

$$L = \max_{Q} |f_y(x, y)|$$

gewählt werden.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard, Lindelöf:

f sei stetig auf dem Quader

$$Q := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a \, , \; |y - y_0| \leq b\right\}$$

mit $M := \max|f(x,y)|$ und erfülle in Q eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y mit der Lipschitz-Konstanten L.

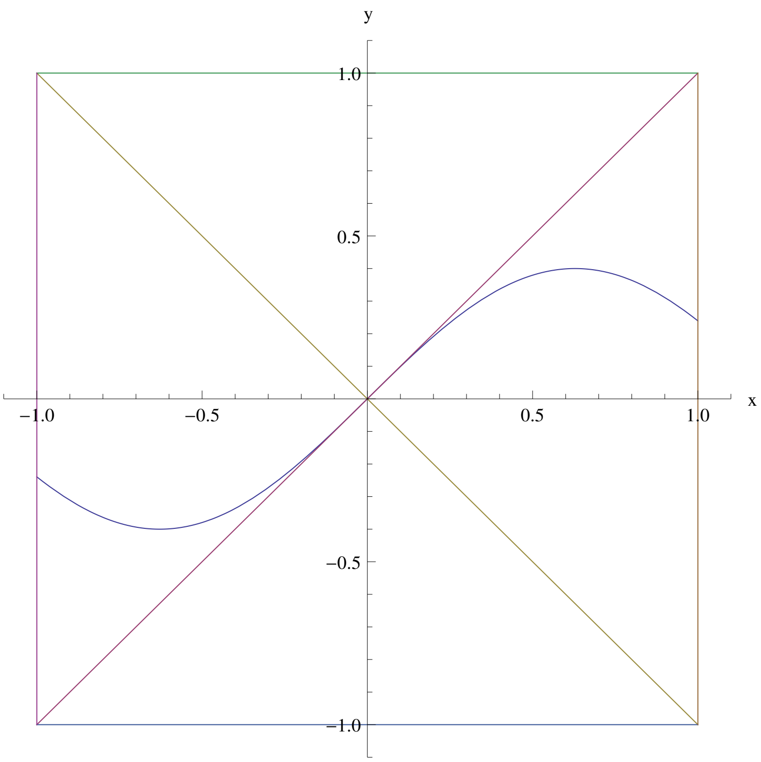

Bild Q mit Geraden $y_{\pm}(x) = y_0 \pm M(x - x_0)$ und Lösung der AWA

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung $y(x)$, die mindestens im Intervall

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

definiert ist, mit

$$\varepsilon := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Aufgabe 14:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = \frac{2}{3}$,
Substitution $u = y^{1-\alpha} = y^{1/3}$ führt auf lineare DGl:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{3}y^{-2/3}y' = \frac{1}{3}y^{-2/3}(-y - y^{2/3}) \\ &= -\frac{1}{3}(y^{1/3} + 1) = -\frac{1}{3}(u+1)\,. \end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(t) = ce^{-t/3} - 1\,.$$

Rücksubstitution

$$y(t) = u^3(t) = \left(ce^{-t/3} - 1\right)^3$$

Der Anfangswert führt auf:

$$\Rightarrow \quad 1 = y(0) = (c-1)^3 \Rightarrow c = 2.$$

Eine Lösung der Anfangswertaufgabe lautet also:

$$y(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3.$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

$$0 = y(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3 \;\Rightarrow\; 2e^{-t/3} = 1 \;\Rightarrow\; t = 3\ln 2$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) > 0 \;\text{ für }\; t \in [0, 3\ln 2[.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ wird nun über den Satz von Picard und Lindelöf nachgewiesen.

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0 \Rightarrow y'(t) = -y(t) - y^{2/3}(t) =: f(t, y)$$

Wegen

$$f_y(t, y) = -1 - \frac{2}{3y^{1/3}}$$

ist f eine C^1-Funktion und

lipschitzstetig bzgl. der y-Koordinate im Quader

$[a, b] \times [c, d]$ mit $0 \le a < b < 3\ln 2$ und $0 < c < d$.

Als Lipschitzkonstante L kann

$$|f_y(t, y)| = \left|-1 - \frac{2}{3y^{1/3}}\right| \le 1 + \frac{2}{3c^{1/3}} =: L$$

gewählt werden.

Damit ist die Lösung $y(t)$ eindeutig bestimmt im Intervall $[a, b]$ und damit auch in $[0, 3\ln 2]$.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Nach a) löst

$$y_1(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$$

die Anfangswertaufgabe im Intervall $[0, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$.

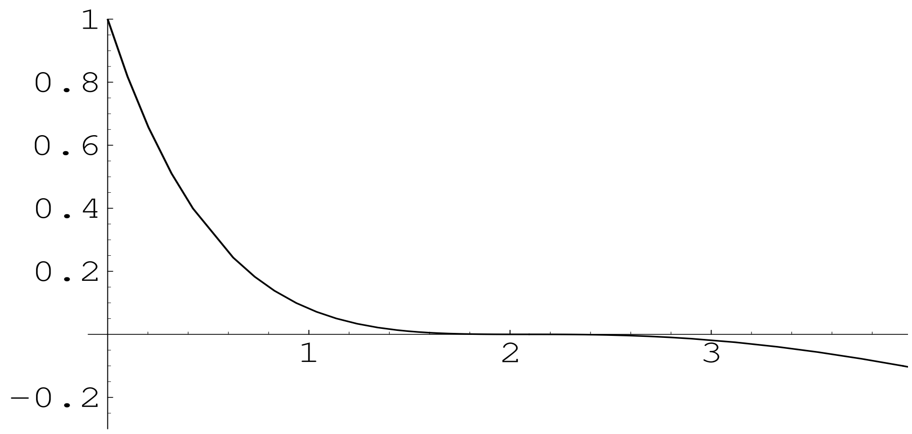

Bild 14 $\quad y_1(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$

Es gilt $y_1(3\ln 2) = 0$ und aus der DGl folgt
$y_1'(3\ln 2) = -y_1(3\ln 2) - y_1^{2/3}(3\ln 2) = 0$.

Außerdem löst $y^* \equiv 0$ die Differentialgleichung. Daher ist

$$y_2(t) := \begin{cases} \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3 & , 0 \leq t \leq 3\ln 2 \\ 0 & 3\ln 2 < t \leq b \end{cases}$$

eine C^1-Funktion auf $[0, b]$, die ebenfalls die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung erfüllt, also Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Systeme 1. Ordnung allgemein

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x), \quad \boldsymbol{b}(x) \in \mathbb{R}^n\,,\ \boldsymbol{A}(x) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems

Die Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$$

bilden einen Vektorraum. Die Basis $\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x)$ dieses Vektorraumes zusammengefasst in den Spalten der Matrix

$$\boldsymbol{Y}(x) := \big(\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^2(x)\big)$$

heißt **Fundamentalsystem** oder **Fundamentalmatrix**. $\boldsymbol{Y}(x)$ ist regulär.

Für die **Wronsk-Determinante** gilt

$$W(x) := \det \boldsymbol{Y}(x) \neq 0\,.$$

Die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(x)$ der homogenen Gleichung wird durch Linearkombination der Basis beschrieben

$$\boldsymbol{y}_h(x) = \boldsymbol{Y}(x)\tilde{\mathbf{c}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Aufgabe 15:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix}.$$

Diese wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die Unbekannten $a_0, \ldots, b_3$ werden über Koeffizientenvergleich bestimmt:

1.Gleichung:

$$y_1'(t) = -y_1(t)/t - 2y_2(t)/t^3$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\
= \quad & -(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3)/t - 2(b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3)/t^3 \\
\Leftrightarrow \quad & 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\
= \quad & -a_3t^2 - a_2t - a_1 - 2b_3 - (a_0 + 2b_2)/t - 2b_1/t^2 - 2b_0/t^3 \\
\Rightarrow \quad & a_3 = 0\,,\ a_2 = 0\,,\ b_1 = 0\,,\ b_0 = 0 \\
& a_1 = -a_1 - 2b_3\,,\ a_0 + 2b_2 = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = -b_3\,,\ a_0 = -2b_2 \\
\Rightarrow \quad & y_1(t) = a_1t + a_0\,, \quad y_2(t) = b_3t^3 + b_2t^2
\end{aligned}$$

2.Gleichung:

$$y_2'(t) = -2ty_1(t) + y_2(t)/t$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 3b_3t^2 + 2b_2t \\
= \quad & -2t(a_1t + a_0) + (b_3t^3 + b_2t^2)/t \\
= \quad & (-2a_1 + b_3)t^2 + (-2a_0 + b_2)t \\
\Rightarrow \quad & 3b_3 = -2a_1 + b_3\,,\ 2b_2 = -2a_0 + b_2 \\
\Rightarrow \quad & a_0 = 0 = b_2\,,\ -b_3 = a_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Für $a_1 = 1$ erhält man damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^3 \end{pmatrix}\,.$$

b) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$
ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

$\boldsymbol{y}^2(t)$ löst die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/t^4 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t)$ sind linear unabhängig, denn für die Matrix $\boldsymbol{Y}(t) := \big(\boldsymbol{y}^1(t)|\boldsymbol{y}^2(t)\big)$ gilt

$$W(t) = \det \boldsymbol{Y}(t) = \det \begin{pmatrix} t & 1/t^3 \\ -t^3 & 1/t \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{für} \quad t \neq 0.$$

Damit ist $\boldsymbol{Y}(t)$ Fundamentalmatrix.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\,\mathbf{c}$.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{Y}(1)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Variation der Konstanten zur Lösung des inhomogenen Systems

In Analogie zur allgemeinen Lösung

der homogenen Differentialgleichung wird mit einer

noch zu bestimmenden vektorwertigen Funktion $\mathbf{c}(x)$

und dem Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ der Lösungsansatz

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$$

in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{Y}'(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{b}(x) \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)\,.\end{gathered}$$

Zunächst werden die Komponenten von $\mathbf{c}'(x)$

durch Lösen des rechtsstehenden Gleichungssystems bestimmt.

Anschließende Integration ergibt $\mathbf{c}(x)$.

Damit lautet eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)\,.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems mit den obigen Bezeichnungen lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x)\,.$$

Aufgabe 16:

Allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Variation der Konstanten berechnen.

Lösung:

Allgemeinen Lösung des linearen homog. Systems berechnen.

System kann von unten nach oben aufgelöst werden,

da die Systemmatrix obere Dreiecksform besitzt.

Für die zweite Gleichung ergibt sich durch Separation

$$y_2' = \frac{y_2}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy_2}{y_2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ \log|y_2| = \log|x| + k_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = c_2 x\ , \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von y_2 in die erste Gleichung

$$y_1' = \frac{3}{x}y_1 + y_2 = \frac{3y_1}{x} + c_2 x$$

ergibt eine lineare inhomogene Differentialgleichung in y_1.

Separation für die lineare homogene Differentialgleichung in y_1

$$y_1' = \frac{3y_1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy_1}{y_1} = 3\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \log|y_1| = 3\log|x| + k_1 \quad \Rightarrow \quad y_{1h} = c_1 x^3\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstanten

für die lineare inhomogene Differentialgleichung in y_1

Ansatz $y_{1p}(x) = k(x)x^3$

$$\Rightarrow \quad k'(x)x^3 = c_2 x \quad \Rightarrow \quad k'(x) = \frac{c_2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = -\frac{c_2}{x} \quad \Rightarrow \quad y_{1p}(x) = -c_2 x^2\,.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung der 1. Gleichung

$$y_1(x) = y_{1h}(x) + y_{1p}(x) = c_1 x^3 - c_2 x^2.$$

Allgem. homogene Lösung $\boldsymbol{y}_h$ mit Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(x)$

$$\boldsymbol{y}_h(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x^3 - c_2 x^2 \\ c_2 x \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{Y}(x)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems

durch Variation der Konstanten: $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1'(x)x^3 - c_2'(x)x^2 \\ c_2'(x)x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_2'(x)x = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x)x^3 - c_2'(x)x^2 = c_1'(x)x^3 + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -\frac{4}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad c_2(x) = \frac{1}{x}, \quad c_1(x) = \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$