Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Anfangswertaufgaben:

Gegeben sei die **Anfangswertaufgabe**

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0 \,,$$

$f : Q := [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ und $a < x_0 < b$, $c < y_0 < d$.

Eulersches Polygonzug-Verfahren: (konstante Schrittweite h)

$$\begin{array}{rclcrcl} x_0 & & & , & y_0 & & \\ x_1 & = & x_0 + h & , & y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) \\ x_2 & = & x_0 + 2h & , & y_2 & = & y_1 + hf(x_1, y_1) \\ x_3 & = & x_0 + 3h & , & y_3 & = & y_2 + hf(x_2, y_2) \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ x_{i+1} & = & x_0 + (i+1)h & , & y_{i+1} & = & y_i + hf(x_i, y_i) \end{array}$$

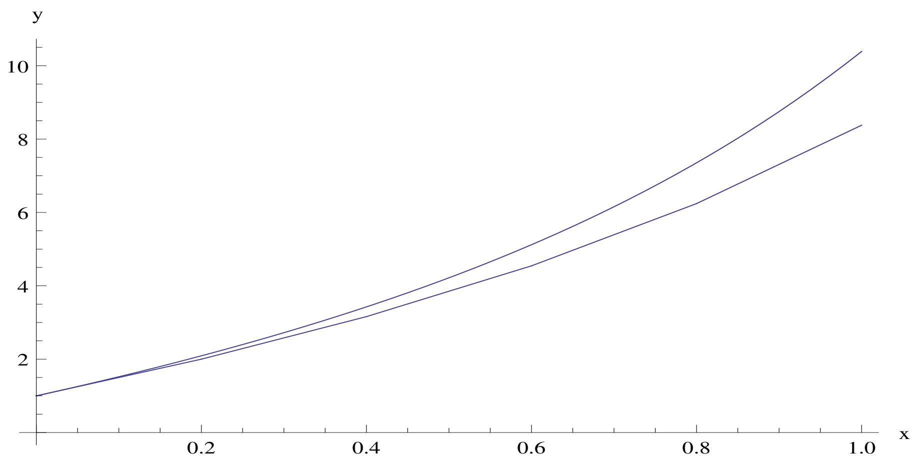


Bild $y(x)$ mit Polygonzug

Verfahren der sukzessiven Approximation:

$$\begin{array}{rcl} y^{[0]}(x) & = & y_0 \\ y^{[1]}(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(\xi, y^{[0]}(\xi)\right) d\xi \\ y^{[2]}(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(\xi, y^{[1]}(\xi)\right) d\xi \\ & \vdots & \\ y^{[k+1]}(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(\xi, y^{[k]}(\xi)\right) d\xi \end{array}$$

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3\,, \quad y(0) = 1\,.$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Lösung:

a) $y' = 2y - 6x + 3 =: f(x, y)$

Eulerschen-Polygonzug-Verfahren mit Startwert
$y(0) = y_0 = 1$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + h(2y_k - 6x_k + 3)$$

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0.0 & y_0 = 1.00000 \\ x_1 = 0.1 & y_1 = 1.50000 \\ x_2 = 0.2 & y_2 = 2.04000 \\ x_3 = 0.3 & y_3 = 2.62800 \\ x_4 = 0.4 & y_4 = 3.27360 \\ x_5 = 0.5 & y_5 = 3.98832 \approx y(0.5) \end{array}$$

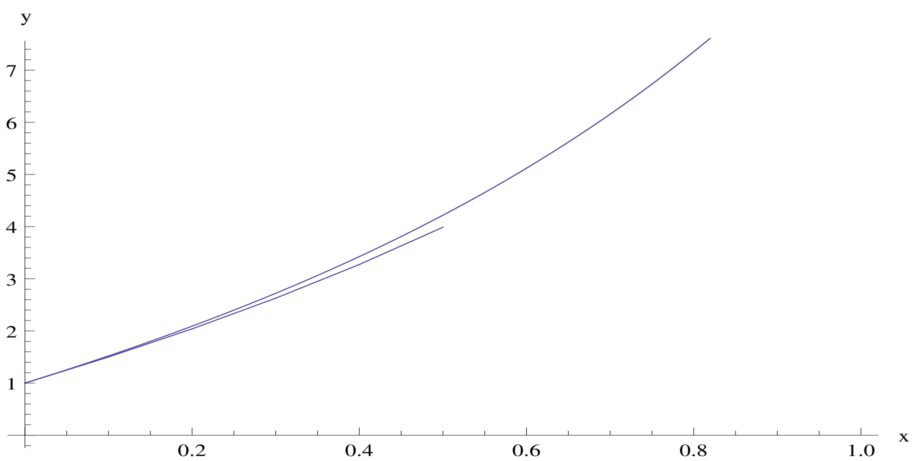


Bild 13 a) $y(x)$ mit Polygonzug

b) Verfahren der sukzessiven Approximation mit Startwert $y^{[0]}(x) = y_0 = 1$

$$y^{[k+1]}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y^{[k]}(t))\, dt = 1 + \int_0^x 2y^{[k]}(t) - 6t + 3\, dt$$

$$\begin{aligned}
y^{[1]}(x) &= 1 + \int_0^x 2 - 6t + 3\, dt = 1 + 5x - 3x^2 \\
y^{[2]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t - 3t^2) - 6t + 3\, dt = 1 + 5x + 2x^2 - 2x^3 \\
y^{[3]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 - 2t^3) - 6t + 3\, dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - x^4 \\
y^{[4]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 - t^4) - 6t + 3\, dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^5 \\
y^{[5]}(x) &= 1 + \int_0^x 2(1 + 5t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{5}t^5) - 6t + 3\, dt \\
&= 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{2}{15}x^6 \\
y^{[5]}(0.5) &= 4.214583333 \approx y(0.5)
\end{aligned}$$

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 2y - 6x + 3$ lautet

$$y(x) = ce^{2x} + 3x$$

Mit $y(0) = 1$ erhält man die Lösung der Anfangswertaufgabe und den Funktionswert an der Stelle $x = 0.5$

$$y(x) = e^{2x} + 3x \quad \Rightarrow \quad y(0.5) = e + 1.5 = 4.2182818...$$

d)
$$y(x) = e^{2x} + 3x = 3x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}x^k = 1 + 5x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{2^k}{k!}x^k$$

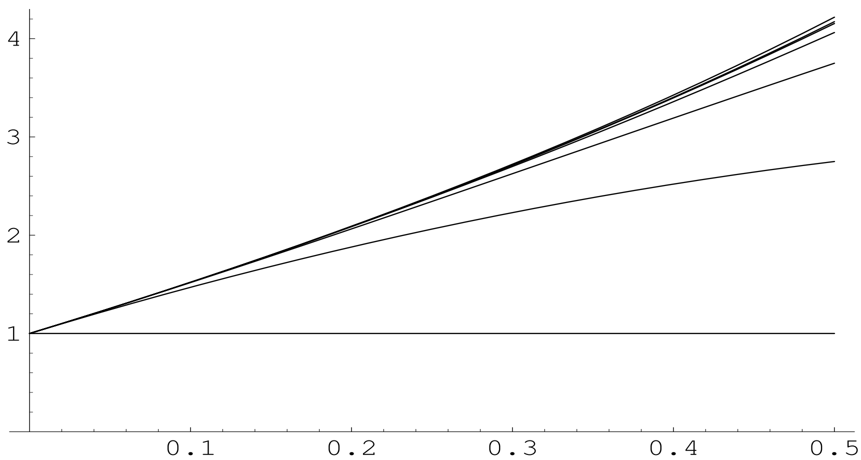


Bild 13 b) $y(x), y^{[0]}(x), \ldots, y^{[5]}(x)$

Existenzsatz von Peano:

Ist f stetig auf Q, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Anfangswertaufgabe eine Lösung $y(x)$ im Intervall $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ besitzt.

Lipschitz-Bedingung:

f erfüllt im abgeschlossenen Quader Q eine **Lipschitz-Bedingung** bzgl. y mit der **Lipschitz-Konstanten** $L \geq 0$, falls für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in Q$ gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \,.$$

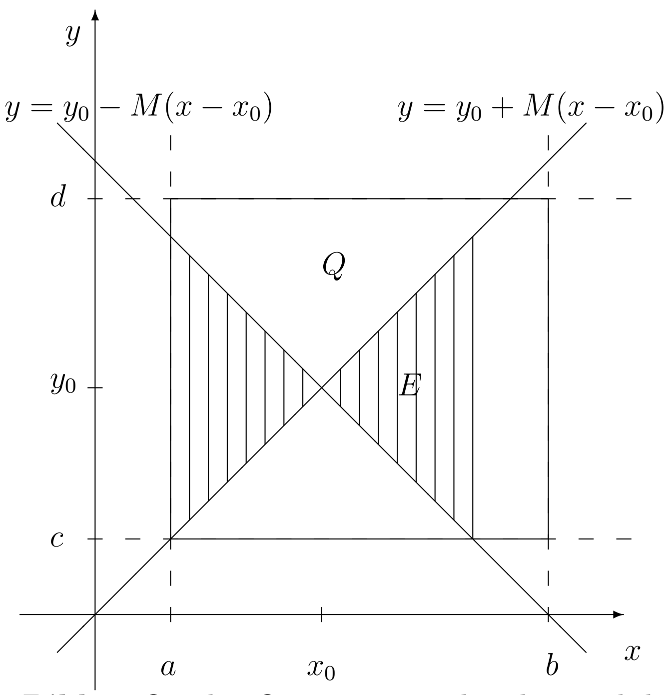
Ist f eine stetig partiell nach y differenzierbare Funktion, dann kann $L = \max_Q |f_y(x, y)|$ gewählt werden.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard, Lindelöf:

f sei stetig auf dem Quader

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \,,\ c \leq y \leq d\right\}$$

mit $M := \max |f(x, y)|$ und erfülle in Q eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y mit der Lipschitz-Konstanten L.



Für die Existenz muss gelten

$$c \leq y_\pm(x) = y_0 \pm M(x - x_0) \leq d$$

$$\Rightarrow \frac{c - y_0}{M} \leq \pm(x - x_0) \leq \frac{d - y_0}{M}.$$

Also muss gelten

$$x_0 - \frac{y_0 - c}{M} \leq x \leq x_0 + \frac{d - y_0}{M}$$

und

$$x_0 - \frac{d - y_0}{M} \leq x \leq x_0 + \frac{y_0 - c}{M}.$$

Bild Quader Q mit Existenzkegel E und den Geraden $y_\pm(x) = y_0 \pm M(x - x_0)$

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung $y(x)$, die mindestens im Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ definiert ist, mit

$$\varepsilon := \min\left(x_0 - a, b - x_0, x_0 + \frac{d - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0 - c}{M}, x_0 - \frac{d - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0 - c}{M}\right) \,.$$

Aufgabe 14:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0\ , \quad y(0) = 1\ .$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Lösung:

a) Bei $y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0$ handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = \frac{2}{3}$, daher führt die Substitution
$u = y^{1-\alpha} = y^{1/3}$ auf:
$u' = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}y' = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}(-y - y^{2/3}) = -\dfrac{1}{3}(y^{1/3} + 1) = -\dfrac{1}{3}(u + 1)\ ,$
mit der allgemeinen Lösung $u(t) = ce^{-t/3} - 1\ .$

Eine Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich damit durch:

$y(t) = u^3(t) = \left(ce^{-t/3} - 1\right)^3$

$\Rightarrow \quad 1 = y(0) = (c-1)^3 \ \Rightarrow\ c = 2,$

Eine Lösung lautet also: $\quad y(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$

b) $0 = y(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3 \ \Rightarrow\ 2e^{-t/3} = 1 \ \Rightarrow\ t = 3\ln 2$
$\Rightarrow\ y(t) > 0$ für $t \in [0, 3\ln 2[$.

Die Eindeutigkeit der Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ wird nun über den Satz von Picard und Lindelöf nachgewiesen.

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(t) = -y(t) - y^{2/3}(t) =: f(t, y)$$

Wegen $f_y(t, y) = -1 - \dfrac{2}{3y^{1/3}}$ ist f eine C^1-Funktion und lipschitzstetig bzgl. der y-Koordinate im Quader $[a, b] \times [c, d]$ mit $0 \le a < b < 3\ln 2$ und $0 < c < d$.
Als Lipschitzkonstante L kann

$$|f_y(t, y)| = \left| -1 - \frac{2}{3y^{1/3}} \right| \le 1 + \frac{2}{3c^{1/3}} =: L$$

gewählt werden. Damit ist die Lösung $y(t)$ eindeutig bestimmt im Intervall $[a, b]$ und damit auch in $[0, 3\ln 2]$.

c) Nach a) löst $y_1(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$ die Anfangswertaufgabe im Intervall $[0, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$.

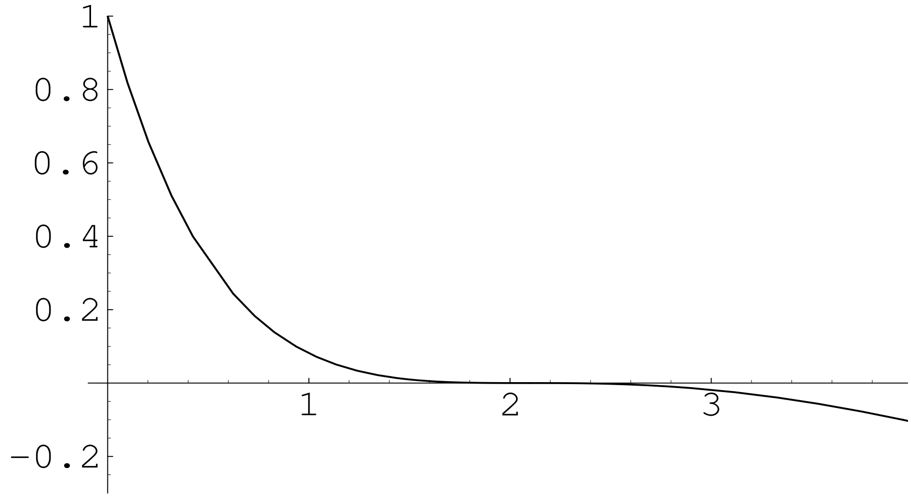


Bild 14 $y_1(t) = \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3$

Es gilt $y_1(3\ln 2) = 0$ und aus der Differentialgleichung folgt

$y_1'(3\ln 2) = -y_1(3\ln 2) - y_1^{2/3}(3\ln 2) = 0.$

Außerdem löst $y^* \equiv 0$ die Differentialgleichung. Daher ist

$$y_2(t) := \begin{cases} \left(2e^{-t/3} - 1\right)^3 & , 0 \le t \le 3\ln 2 \\ 0 & 3\ln 2 < t \le b \end{cases}$$

eine C^1-Funktion auf $[0, b]$, die ebenfalls die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung erfüllt, also Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Systeme 1. Ordnung allgemein

DGl-Typ: $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x), \quad \boldsymbol{b}(x) \in \mathbb{R}^n \,,\; \boldsymbol{A}(x) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems

Die Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$$

bilden einen Vektorraum. Die Basis $\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x)$ dieses Vektorraumes zusammengefasst in den Spalten der Matrix

$$\boldsymbol{Y}(x) := \big(\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x)\big)$$

heißt **Fundamentalmatrix** oder **Fundamentalsystem**. $\boldsymbol{Y}(x)$ ist regulär.

Für die **Wronsk-Determinante** gilt $W(x) := \det \boldsymbol{Y}(x) \neq 0$.

Die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(x)$ der homogenen Gleichung wird durch Linearkombination der Basis beschrieben

$$\boldsymbol{y}_h(x) = \boldsymbol{Y}(x)\tilde{\mathbf{c}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n \,.$$

Aufgabe 15:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix} .$$

b) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Lösung:

a) Die Lösung in Polynomform

$$\boldsymbol{y}^1(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix}$$

wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die Unbekannten $a_0, \ldots, b_3$ werden über Koeffizientenvergleich bestimmt:

1.Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -y_1(t)/t - 2y_2(t)/t^3 \\ \Rightarrow & & a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ & = & -(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3)/t - 2(b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3)/t^3 \\ \Leftrightarrow & & 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\ & = & -a_3t^2 - a_2t - a_1 - 2b_3 - (a_0 + 2b_2)/t - 2b_1/t^2 - 2b_0/t^3 \\ \Rightarrow & & a_3 = 0\,,\ a_2 = 0\,,\ b_1 = 0\,,\ b_0 = 0 \\ & & a_1 = -a_1 - 2b_3\,,\ a_0 + 2b_2 = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = -b_3\,,\ a_0 = -2b_2 \\ \Rightarrow & & y_1(t) = a_1t + a_0\,, \quad y_2(t) = b_3t^3 + b_2t^2 \end{array}$$

2.Gleichung:

$$\begin{aligned}
y_2'(t) &= -2ty_1(t) + y_2(t)/t \\
\Rightarrow \quad & 3b_3t^2 + 2b_2t \\
&= -2t(a_1t + a_0) + (b_3t^3 + b_2t^2)/t \\
&= (-2a_1 + b_3)t^2 + (-2a_0 + b_2)t \\
\Rightarrow \quad & 3b_3 = -2a_1 + b_3\ ,\ 2b_2 = -2a_0 + b_2 \\
\Rightarrow \quad & a_0 = 0 = b_2\ ,\ -b_3 = a_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Für $a_1 = 1$ erhält man damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^3 \end{pmatrix} .$$

b) $\boldsymbol{y}^2(t)$ löst die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/t^4 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix} .$$

Die Lösungen $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t)$ sind linear unabhängig, denn für die Matrix $\boldsymbol{Y}(t) := (\boldsymbol{y}^1(t)|\boldsymbol{y}^2(t))$ gilt für die Wronski-Determinate

$$\det \begin{pmatrix} t & 1/t^3 \\ -t^3 & 1/t \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{für} \quad t \neq 0.$$

Damit ist $\boldsymbol{Y}(t)$ Fundamentalmatrix.

c) Mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\,\mathbf{c}$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{Y}(1)\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Variation der Konstanten zur Lösung des inhomogenen Systems

In Analogie zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung wird mit einer noch zu bestimmenden vektorwertigen Funktion $\mathbf{c}(x)$ und dem Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(x)$ der Lösungsansatz

$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$ in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$\boldsymbol{Y}'(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{b}(x) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Zunächst werden die Komponenten von $\mathbf{c}'(x)$ durch Lösen des rechtsstehenden Gleichungssystems bestimmt. Anschließende Integration ergibt $\mathbf{c}(x)$.

Damit lautet eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)\,.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems mit den obigen Bezeichnungen lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x)\,.$$

Aufgabe 16:

Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Lösung:

Zunächst wird die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems berechnet. Das System kann von unten nach oben aufgelöst werden, da die Systemmatrix obere Dreiecksform besitzt. Für die zweite Gleichung ergibt sich durch Separation

$$y_2' = \frac{y_2}{x} \Rightarrow \int \frac{dy_2}{y_2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log|y_2| = \log|x| + k_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = c_2 x\,, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$y_1' = \frac{3}{x}y_1 + y_2 = \frac{3y_1}{x} + c_2 x$$

eine lineare inhomogene Differentialgleichung in y_1.

Die lineare homogene Differentialgleichung in y_1 wird durch Separation gelöst

$$y_1' = \frac{3y_1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy_1}{y_1} = 3\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \log|y_1| = 3\log|x| + k_1 \quad \Rightarrow \quad y_{1h} = c_1 x^3, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Die lineare inhomogene Differentialgleichung in y_1 wird mit Variation der Konstanten über den Ansatz $y_{1p}(x) = k(x)x^3$ gelöst

$$\Rightarrow \quad k'(x)x^3 = c_2 x \quad \Rightarrow \quad k'(x) = \frac{c_2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad k(x) = -\frac{c_2}{x} \quad \Rightarrow \quad y_{1p}(x) = -c_2 x^2\,.$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung der 1. Gleichung

$$y_1(x) = y_{1h}(x) + y_{1p}(x) = c_1 x^3 - c_2 x^2.$$

Die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h$ des homogenen Systems lautet also

$$\boldsymbol{y}_h(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x^3 - c_2 x^2 \\ c_2 x \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{Y}(x)}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{Y}(x)$. Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich durch Variation der Konstanten $\boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x)$

$$\boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x)x^3 - c_2'(x)x^2 \\ c_2'(x)x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad c_2'(x)x = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x)x^3 - c_2'(x)x^2 = c_1'(x)x^3 + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -\frac{4}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad c_2(x) = \frac{1}{x}\,, \quad c_1(x) = \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y}_p(x) = \boldsymbol{Y}(x)\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems lautet also

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_p(x) = c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$