Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Methode des integrierenden Faktors

DGl-Typ: $g(x,y) + h(x,y)y'(x) = 0$

Die Exaktheit kann unter Umständen durch Multiplikation mit dem Faktor $m(x,y)$ erreicht werden:

$$m(x,y) \cdot g(x,y) + m(x,y) \cdot h(x,y)y'(x) = 0\,.$$

Integrabilitätsbedingung:

$$(m(x,y) \cdot g(x,y))_y = (m(x,y) \cdot h(x,y))_x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & m_y(x,y) \cdot g(x,y) + m(x,y) \cdot g(x,y)_y \\ = \; & m(x,y)_x \cdot h(x,y) + m(x,y) \cdot h(x,y)_x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad m_y(x,y)g(x,y) - m_x(x,y)h(x,y) = m(x,y)(h_x(x,y) - g_y(x,y))$$

Beispiel:

Es gelte $m(x,y) = m(x+y) = m(z)$ mit $z := x+y$.

Konstruktionsbedingung für m: (Kettenregel!)

$$m_y(x+y)g(x,y) - m_x(x+y)h(x,y) = m(x+y)(h_x(x,y) - g_y(x,y))$$

$$\Rightarrow \; m'(z)(g(x,y) - h(x,y)) = m(z)(h_x(x,y) - g_y(x,y))$$

$$\Rightarrow \; m'(z) = \underbrace{\frac{h_x(x,y) - g_y(x,y)}{g(x,y) - h(x,y)}}_{=:a(x,y)} \cdot m(z)$$

Gilt $a(x,y) = a(x+y) = a(z)$, so kann der Faktor $m(z)$ über das Lösen der Differentialgleichung $m'(z) = a(z) \cdot m(z)$ konstruiert werden.

Aufgabe 9:

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$y + ty^3 + (t + 2t^2y^2)y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt

und bestimme damit dann die allgemeine Lösung

(eine implizite Darstellung reicht aus).

Lösung:

Die Differentialgleichung

$$\underbrace{y + ty^3}_{=g(t,y)} + \underbrace{(t + 2t^2y^2)}_{=h(t,y)} y' = 0$$

ist nicht exakt, denn

$$g_y = 1 + 3ty^2 \neq 1 + 4ty^2 = h_t \, .$$

Integrabilitätsbedingung nach

Multiplikation der Gleichung mit dem integrierenden Faktor

der Form $m = m(t \cdot y)$ lautet (Kettenregel verwenden)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(m(t \cdot y) \cdot h(t,y)) = m'yh + mh_t \\ \stackrel{!}{=} \; & \frac{\partial}{\partial y}(m(t \cdot y) \cdot g(t,y)) = m'tg + mg_y \, . \end{aligned}$$

Auflösen nach m' ergibt mit

$$z := ty$$

eine gewöhnliche Diffentialgleichung

für $m(z)$ in der Variablen z:

$$\begin{aligned} m'(z) &= \frac{g_y - h_t}{yh - tg} m(z) \\ &= \frac{1 + 3ty^2 - (1 + 4ty^2)}{ty + 2t^2y^3 - (ty + t^2y^3)} m(z) \\ &= -\frac{ty^2}{t^2y^3} m(z) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{ty}}_{=a} m(z) \\ &= -\frac{1}{z} m(z) \end{aligned}$$

Kann $a = a(t, y)$ nicht in $a = a(z)$ überführt werden,

lässt sich kein integrierender Faktor

in der Form $m(t, y) = m(t \cdot y)$ finden.

Die Differentialgleichung in m

$$m'(z) = -\frac{1}{z} m(z)$$

wird durch $m(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{ty}$ gelöst.

Multiplikation der Ausgangsgleichung mit m

ergibt die exakte Differentialgleichung

$$\frac{1}{t} + y^2 + \left(\frac{1}{y} + 2ty\right) y' = 0 \, .$$

Berechnung des zugehörigen Potentials $\Phi(t, y)$:

$\Phi_t = \frac{1}{t} + y^2$

$\Rightarrow \quad \Phi(t, y) = \ln|t| + ty^2 + \varphi(y)$

$\Rightarrow \quad \Phi_y(t, y) = 2ty + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} \frac{1}{y} + 2ty.$

ergibt $\quad \varphi'(y) = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \ln|y| + c \quad$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Setzt man dies oben ein, so folgt

$$\Phi(t, y) = \ln|t| + ty^2 + \ln|y| + c.$$

Die implizite Lösungsdarstellung lautet also

$$\ln|ty| + ty^2 = C \, .$$

Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung:

DGl-Typ A:

Die Differentialgleichung hängt nicht explizit von y ab.

$$y''(x) = f(x, y'(x))$$

Lösungsmethode: Substitution $z(x) = y'(x)$

Man erhält die Differentialgleichung 1.Ordnung

$$z'(x) = f(x, z(x)).$$

DGl-Typ B:

Die Differentialgleichung ist **autonom**,

d.h. hängt nicht explizit von x ab

$$y''(x) = f(y(x), y'(x)).$$

Lösungsmethode: Substitution $y'(x(y)) =: v(y)$

$$\Rightarrow \quad f(y, v(y)) = y''(x) = \frac{d}{dx}(v(y(x))) = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v'(y)v(y)$$

Für $v(y) = y'(x) \neq 0$ erhält man

die Differentialgleichung 1.Ordnung

$$v'(y) = \frac{f(y, v(y))}{v(y)} .$$

Ist $v(y, c)$ die Lösung, ergibt sich y aus der Substitution durch Separation:

$$y'(x) = v(y(x), c) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{v(y(x), c)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{v(y, c)} = x + C.$$

DGl-Typ C:

Die Differentialgleichung ist autonom und hängt nicht explizit von y' ab.

$$y''(x) = f(y(x))$$

Lösungsmethode:

$$y''(x) = f(y(x))$$

$$\Rightarrow\ 2y''(x)y'(x) = 2f(y(x))y'(x)$$

$$\Rightarrow\ \int 2y'(x)y''(x)dx = \int 2f(y(x))y'(x)dx$$

$$\Rightarrow\ \int 2y'dy' = \int 2f(y)dy$$

$$\Rightarrow\ (y'(x))^2 = 2F(y(x)) + c$$

$$\Rightarrow\ y'(x) = \pm\sqrt{2F(y(x)) + c}$$

$$\Rightarrow\ \pm\int \frac{y'(x)dx}{\sqrt{2F(y(x)) + c}} = \int dx$$

$$\Rightarrow\ \int \frac{dy}{\sqrt{2F(y) + c}} = x + C$$

Aufgabe 10:

Man löse folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-y)y'' + 2(y')^2 \;=\; 0.$$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist autonom

$$(1-y)y'' + 2(y')^2 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' \;=\; \frac{2(y')^2}{y-1} \;=\; f(y,y')\,.$$

Angenommen zu $y(x)$ existiert eine Umkehrfunktion $x(y)$.

Setze $v(y) = y'(x(y))$. Aus

$$f(y,y') = y''(x) = (v(y(x)))' = v'(y)y'(x) = v'v$$

ergibt sich dann

$$v'(y) \;=\; \frac{f(y,v)}{v} = \frac{2v^2}{v(y-1)}\,.$$

Trennung der Variablen ergibt

$\ln|v| = 2\ln|y-1| + c \quad \Rightarrow \quad v = y' = C(y-1)^2\,.$

Erneute Trennung der Variablen ergibt $-\dfrac{1}{y-1} = Cx + D\,.$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y = \frac{Cx+D-1}{Cx+D} = \frac{x+C_1}{x+C_2}\,.$$

Aufgabe 11:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{a) } y'' = y^{-3}\,, \qquad \text{b) } xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) .$$

Lösung:

a) Die DGL ist autonom und hängt nicht von y' ab

$$y'' = y^{-3} = f(y)\,.$$

Multiplikation mit y' und Integration nach x:

$$y''y' = y'y^{-3} \quad \Rightarrow \quad \int y' \underbrace{y''dx}_{dy'} = \int y^{-3} \underbrace{y'dx}_{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(y')^2}{2} = c - \frac{1}{2y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \pm\frac{y'}{\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + D = \pm\int \frac{1}{\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}}\,dy$$

$$= \pm\int \frac{y}{\sqrt{Cy^2 - 1}}\,dy = \pm\frac{1}{C}\sqrt{Cy^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad Cy^2 = 1 + (C(x+D))^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{1 + C^2(x+D)^2}{C}}$$

b) Die Differentialgleichung hängt nicht explizit von y ab

$$xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y'' = \frac{y'}{x} \ln\left(\frac{y'}{x}\right) = f(x, y').$$

$y' = z$ ergibt eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$z' = \frac{z}{x} \ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

in der erneut substituiert wird $u = \dfrac{z}{x} \Rightarrow z' = u + xu'$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{u \ln u - u}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{du}{u \ln u - u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \quad \ln u = Cx + 1 \quad \Rightarrow \quad u = e^{Cx+1}$$

$$\Rightarrow \quad z = y' = xe^{Cx+1} \quad \Rightarrow \quad y = \int xe^{Cx+1} dx$$

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{ex^2}{2} & \text{falls } C = 0 \\ e^{Cx+1}\left(\dfrac{x}{C} - \dfrac{1}{C^2}\right) & \text{falls } C \neq 0 \end{array} \right\} + K$$

Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Bernoullische Differentialgleichung

DGl-Typ:

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x) = 0, \quad \alpha \neq 0, 1$$

Substitution: $u(x) := (y(x))^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \; y(x) = (u(x))^{1/(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \; y'(x) = \tfrac{1}{1-\alpha}(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)}u'(x)$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{1-\alpha}(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)}u'(x) + a(x)(u(x))^{1/(1-\alpha)} + b(x)(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{1-\alpha}u'(x) + a(x)u(x) + b(x) = 0$$

$$\Rightarrow \; u'(x) = (\alpha - 1)a(x)u(x) + (\alpha - 1)b(x)$$

(lineare Differentialgleichung)

Aufgabe 12:

Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben

und bestimme den Bereich, in dem die Lösungen existieren.

a) $y' = 2xe^{-y}$ mit $y(0) = 0$

Trennung der Variablen ergibt:

$$y' = 2xe^{-y} \quad \Rightarrow \quad \int e^y dy = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow \; e^y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \ln(x^2 + C).$$

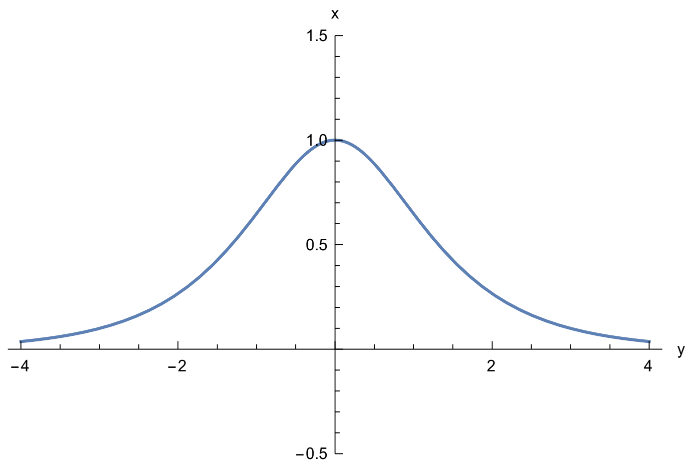
Die Anfangsbedingung ergibt

$$0 = y(0) = \ln C \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y(x) = \ln(x^2 + 1)$$

existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.



Funktionsgraph von $y(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $y' = 2xy \quad \text{mit} \quad y\,(0) = 3$

Trennung der Variablen ergibt:

$$y' = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = 2x$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow\; \ln|y| = x^2 + c \;\Rightarrow\; y(x) = Ce^{x^2}\;.$$

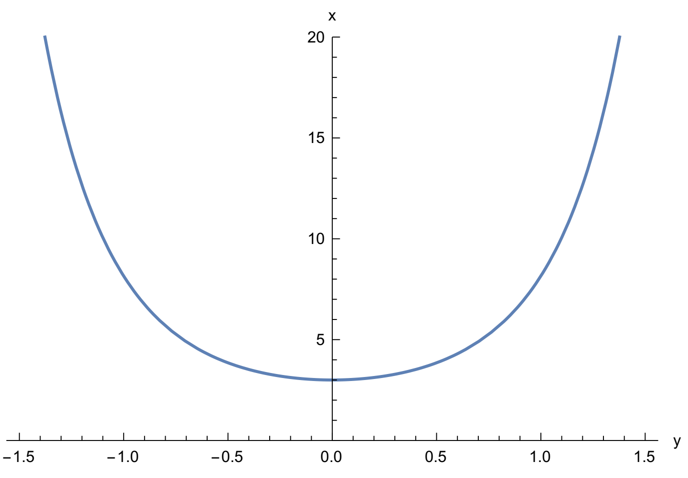
Die Anfangsbedingung ergibt

$$3 = y\,(0) = Ce^{0^2} = C.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y(x) = 3e^{x^2}$$

existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.



Funktionsgraph von $y(x) = 3e^{x^2}$

c) $y' - \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$

Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + ay + by^\alpha = y' - \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = 4\,,\ \ a = -1/3\,,\ \ b = -1/3$$

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = \frac{1}{y^3(x)} \Leftrightarrow y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}}$$

Transformierte lineare inhomogene Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha-1)b(x) \quad \Rightarrow \quad u' + u = -1$$

Allgemeine homogene Lösung:

$$u_h(x) = ce^{-x} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Variation der Konstanten: $u_p(x) = c(x)e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad c'(x)e^{-x} = -1 \ \Rightarrow \ c'(x) = -e^x$$

$$\Rightarrow \ c(x) = -e^x \ \Rightarrow \ u_p(x) = -1$$

allgemeine inhomogene Lösung

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = ce^{-x} - 1$$

Rücksubstitution

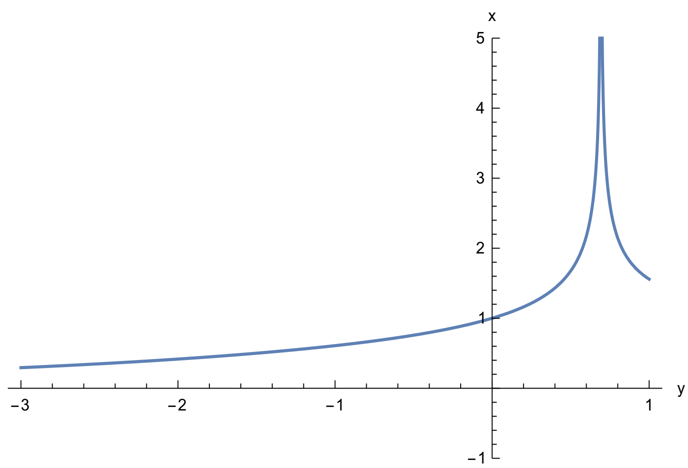
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ce^{-x} - 1}}$$

Anfangsbedingung

$$1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{c-1}} \quad \Rightarrow \quad c = 2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{-x} - 1}}$$

Die Lösung existiert für

$$2e^{-x} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \ln 2 = 0.693147...$$



Funktionsgraph von $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{-x}-1}}$