Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Methode des integrierenden Faktors

DGl-Typ: $g(x,y) + h(x,y)y'(x) = 0$

Sollte diese Differentialgleichung nicht exakt sein, so kann die Exaktheit unter Umständen durch Multiplikation mit dem Faktor $m(x,y)$ erreicht werden:

$$m(x,y) \cdot g(x,y) + m(x,y) \cdot h(x,y)y'(x) = 0\,.$$

Integrabilitätsbedingung: $(m(x,y) \cdot g(x,y))_y = (m(x,y) \cdot h(x,y))_x$

$$\Rightarrow \quad m_y(x,y) \cdot g(x,y) + m(x,y) \cdot g(x,y)_y = m(x,y)_x \cdot h(x,y))_x + m(x,y) \cdot h(x,y)_x$$

$$\Rightarrow \quad m_y(x,y)g(x,y) - m_x(x,y)h(x,y) = m(x,y)(h_x(x,y) - g_y(x,y))$$

Beispiel: Es gelte $m(x,y) = m(x+y) = m(z)$ mit $z := x + y$.

Dann lautet die Konstruktionsbedingung für m: (Kettenregel!)

$$m_y(x+y)g(x,y) - m_x(x+y)h(x,y) = m(x+y)(h_x(x,y) - g_y(x,y))$$

$$\Rightarrow \quad m'(z)(g(x,y) - h(x,y)) = m(z)(h_x(x,y) - g_y(x,y))$$

$$\Rightarrow \quad m'(z) = \underbrace{\frac{h_x(x,y) - g_y(x,y)}{g(x,y) - h(x,y)}}_{=:a(x,y)} \cdot m(z)$$

Gilt $a(x,y) = a(x+y) = a(z)$, so kann der Faktor $m(z)$ über das Lösen der Differentialgleichung $m'(z) = a(z) \cdot m(z)$ konstruiert werden.

Aufgabe 9:

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$y + ty^3 + (t + 2t^2y^2)y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Lösung:

Die Differentialgleichung

$$\underbrace{y + ty^3}_{=g(t,y)} + \underbrace{(t + 2t^2y^2)}_{=h(t,y)}y' = 0$$

ist nicht exakt, denn $g_y = 1 + 3ty^2 \neq 1 + 4ty^2 = h_t$.

Die Integrabilitätsbedingung nach Multiplikation der Gleichung mit dem integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ lautet (Kettenregel verwenden)

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(t \cdot y) \cdot h(t,y)) = ym'h + mh_t \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial y}(m(t \cdot y) \cdot g(t,y)) = tm'g + mg_y\,.$$

Auflösen nach m' ergibt mit $z := ty$ eine gewöhnliche Diffentialgleichung für $m(z)$ in der Variablen z:

$$m'(z) = \frac{g_y - h_t}{yh - tg}m(z) = \frac{1 + 3ty^2 - (1 + 4ty^2)}{ty + 2t^2y^3 - (ty + t^2y^3)}m(z)$$

$$= -\frac{ty^2}{t^2y^3}m(z) = \underbrace{-\frac{1}{ty}}_{=a}\,m(z) = -\frac{1}{z}m(z)$$

Kann $a = a(t,y)$ nicht in $a = a(z)$ überführt werden, lässt sich kein integrierender Faktor in der Form $m(t,y) = m(t \cdot y)$ finden.

Die Differentialgleichung in m

$$m'(z) = -\frac{1}{z} m(z)$$

wird durch $m(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{ty}$ gelöst. Multiplikation der Ausgangsgleichung mit m ergibt die exakte Differentialgleichung

$$\frac{1}{t} + y^2 + \left(\frac{1}{y} + 2ty\right) y' = 0\,.$$

Berechnung des zugehörigen Potentials $\Phi(t, y)$:

$\Phi_t = \frac{1}{t} + y^2$

$\Rightarrow \quad \Phi(t, y) = \ln|t| + ty^2 + \varphi(y)$

$\Rightarrow \quad \Phi_y(t, y) = 2ty + \varphi'(y).$

Vergleich mit $\Phi_y(t, y) = \frac{1}{y} + 2ty$ ergibt $\varphi'(y) = \frac{1}{y}$

also $\varphi(y) = \ln|y| + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Setzt man dies oben ein, so folgt $\Phi(t, y) = \ln|t| + ty^2 + \ln|y| + c$.

Die implizite Lösungsdarstellung lautet also

$$\ln|ty| + ty^2 = C\,.$$

Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung:

DGl-Typ A: Die Differentialgleichung hängt nicht explizit von y ab.

$$y''(x) = f(x, y'(x))$$

Lösungsmethode: Substitution: $z(x) := y'(x)$

$\Rightarrow$ Differentialgleichung 1.Ordnung: $z'(x) = f(x, z(x))$

DGl-Typ B:

Die Differentialgleichung ist **autonom**, hängt also nicht explizit von x ab.

$$y''(x) = f(y(x), y'(x))$$

Lösungsmethode: Substitution: $y'(x(y)) =: v(y)$

$$\Rightarrow \quad f(y, v(y)) = y''(x) = \frac{d}{dx}(v(y(x))) = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = v'(y)v(y)$$

Für $v(y) = y'(x) \neq 0$ erhält man die Differentialgleichung 1.Ordnung

$$v'(y) = \frac{f(y, v(y))}{v(y)} \, .$$

Ist $v(y, c)$ die Lösung, ergibt sich y aus der Substitution durch Separation:

$$y'(x) = v(y(x), c) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{v(y(x), c)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{v(y, c)} = x + C \, .$$

DGl-Typ C:

Die Differentialgleichung ist autonom und hängt nicht explizit von y' ab.

$$y''(x) = f(y(x))$$

Lösungsmethode:

$$y''(x) = f(y(x)) \quad \Rightarrow \quad 2y''(x)y'(x) = 2f(y(x))y'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int 2y'(x)y''(x)dx = \int 2f(y(x))y'(x)dx \Rightarrow \int 2y'dy' = \int 2f(y)dy$$

$$\Rightarrow \quad (y'(x))^2 = 2F(y(x)) + c \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \pm\sqrt{2F(y(x)) + c}$$

$$\Rightarrow \quad \pm \int \frac{y'(x)dx}{\sqrt{2F(y(x)) + c}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{2F(y) + c}} = x + C$$

Aufgabe 10:

Man löse folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-y)y'' + 2(y')^2 \; = \; 0.$$

Lösung:

Die Differentialgleichung ist autonom

$$(1-y)y'' + 2(y')^2 \; = \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' \; = \; \frac{2(y')^2}{y-1} \; = \; f(y, y')\,.$$

Angenommen zu $y(x)$ existiert eine Umkehrfunktion $x(y)$.

Setze $v(y) = y'(x(y))$. Aus

$$f(y, y') = y''(x) = (v(y(x)))' = v'(y)y'(x) = v'v$$

ergibt sich dann

$$v'(y) \; = \; \frac{f(y,v)}{v} = \frac{2v^2}{v(y-1)}\,.$$

Trennung der Variablen ergibt

$\ln|v| = 2\ln|y-1| + c \;\Rightarrow\; v = y' = C(y-1)^2$.

Erneute Trennung der Variablen ergibt $-\dfrac{1}{y-1} = Cx + D$.

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y = \frac{Cx + D - 1}{Cx + D} = \frac{x + C_1}{x + C_2}\,.$$

Aufgabe 11:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{a) } y'' = y^{-3}\,, \qquad \text{b) } xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) .$$

Lösung:

a) Die Differentialgleichung ist autonom und hängt nicht von y' ab.
$y'' = y^{-3} = f(y)$ wird mit y' multipliziert und nach x integriert:

$$y''y' = y'y^{-3} \quad \Rightarrow \quad \int y' \underbrace{y''dx}_{dy'} = \int y^{-3} \underbrace{y'dx}_{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(y')^2}{2} = c - \frac{1}{2y^2}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \pm\frac{y'}{\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + D = \pm\int \frac{1}{\sqrt{C - \frac{1}{y^2}}}\, dy = \pm\int \frac{y}{\sqrt{Cy^2 - 1}}\, dy = \pm\frac{1}{C}\sqrt{Cy^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad Cy^2 = 1 + (C(x+D))^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{1 + C^2(x+D)^2}{C}}$$

b) Die Differentialgleichung hängt nicht explizit von y ab:

$$xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y'' = \frac{y'}{x} \ln\left(\frac{y'}{x}\right) = f(x, y')$$

Man setzt $y' = z$ und erhält eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung in der $u = \dfrac{z}{x}$ substituiert wird:

$$z' = \frac{z}{x} \ln\left(\frac{z}{x}\right) \Rightarrow u' = \frac{u \ln u - u}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u \ln u - u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln u = Cx + 1 \Rightarrow u = e^{Cx+1}$$

$$\Rightarrow z = y' = xe^{Cx+1} \Rightarrow y = \int xe^{Cx+1} dx$$

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{ex^2}{2} & \text{falls } C = 0 \\ e^{Cx+1}\left(\dfrac{x}{C} - \dfrac{1}{C^2}\right) & \text{falls } C \neq 0 \end{array} \right\} + K$$

Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Bernoullische Differentialgleichung

DGl-Typ: $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x) = 0, \quad \alpha \neq 0, 1$

Substitution: $u(x) := (y(x))^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (u(x))^{1/(1-\alpha)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)}u'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)}u'(x) + a(x)(u(x))^{1/(1-\alpha)} + b(x)(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}u'(x) + a(x)u(x) + b(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad u'(x) = (\alpha - 1)a(x)u(x) + (\alpha - 1)b(x)$ (lineare Differentialgleichung)

Aufgabe 12:

Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben und bestimme den Bereich, in dem die Lösungen existieren

a) $y' = 2xe^{-y}$ mit $y(0) = 0$,

b) $y' = 2xy$ mit $y\,(0) = 3$,

c) $y' - \dfrac{y}{3} - \dfrac{y^4}{3} = 0$ mit $y(0) = 1$.

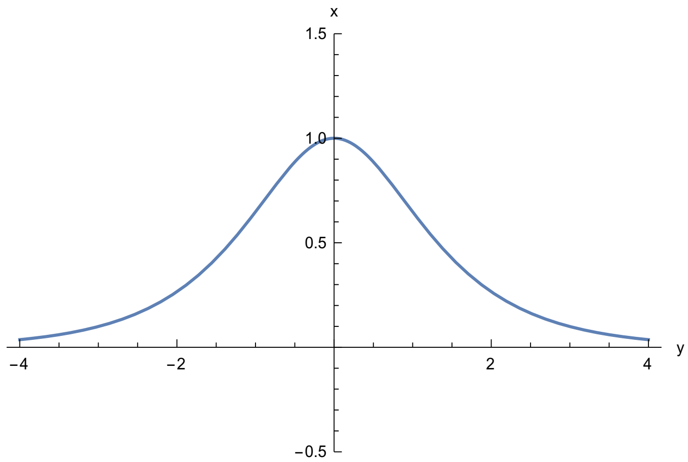
Lösung:

a) Trennung der Variablen ergibt:

$$y' = 2xe^{-y} \;\Rightarrow\; \int e^y dy = \int 2x dx \;\Rightarrow\; e^y = x^2 + C \;\Rightarrow\; y(x) = \ln(x^2 + C).$$

Die Anfangsbedingung ergibt $\quad 0 = y(0) = \ln C \Rightarrow C = 1.$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $\quad y(x) = \ln(x^2+1)\quad$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.



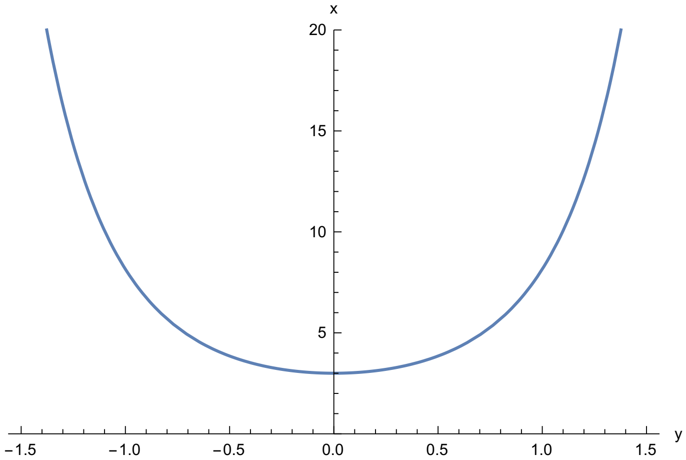
Funktionsgraph von $y(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) Trennung der Variablen ergibt:

$$y' = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = 2x \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = x^2 + c \;\Rightarrow\; y(x) = Ce^{x^2}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $\quad 3 = y\,(0) = Ce^{0^2} = C.$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $\quad y(x) = 3e^{x^2}\quad$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.



Funktionsgraph von $y(x) = 3e^{x^2}$

c) Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + ay + by^\alpha = y' - \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4,\ a = -1/3,\ b = -1/3\,.$$

Substitution: $u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = \dfrac{1}{y^3(x)} \Leftrightarrow y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{u(x)}}$

Transformierte lineare inhomogene Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \quad \Rightarrow \quad u' + u = -1\,.$$

Allgemeine homogene Lösung: $u_h(x) = ce^{-x}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

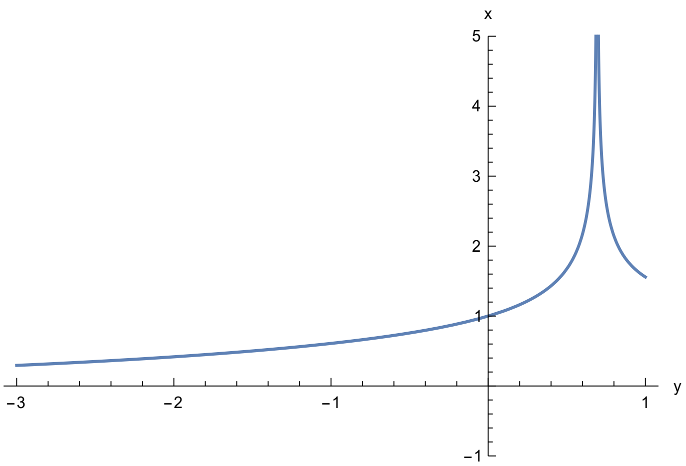
Variation der Konstanten: $u_p(x) = c(x)e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad c'(x)e^{-x} = -1 \ \Rightarrow\ c'(x) = -e^x \ \Rightarrow\ c(x) = -e^x \ \Rightarrow\ u_p(x) = -1$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = ce^{-x} - 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ke^{-x} - 1}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}} \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{-x} - 1}}$$

Die Lösung existiert für $2e^{-x} - 1 > 0 \ \Rightarrow\ x < \ln 2 = 0.693147...$



Funktionsgraph von $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^{-x}-1}}$