Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Aufgabe 5:

Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

$y' = (x - y + 3)^2$ mit $y(1) = 1$.

Substitution $u = x - y + 3 \quad \Rightarrow \quad u(1) = 3$

$$1 - u' = u^2 \quad \Rightarrow \quad u' = 1 - u^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u'}{1-u^2} = 1, \quad u^2 \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\, du$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \ln \left|\frac{u+1}{u-1}\right| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \ln \left|\frac{u+1}{u-1}\right| = \ln \frac{u+1}{u-1} = 2x + 2c, \quad \text{da } u(1) = 3 > 1$$

$$\ln \frac{u(1)+1}{u(1)-1} = \ln 2 = 2 \cdot 1 + 2c \quad \Rightarrow \quad 2c = \ln 2 - 2$$

$$\ln \frac{u+1}{u-1} = 2x + 2c = 2x + \ln 2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u+1}{u-1} = e^{2x+\ln 2-2} = 2e^{2x-2}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{2e^{2x-2}+1}{2e^{2x-2}-1}$$

Mit der Rücksubstitution $y = x + 3 - u$ lautet die Lösung

$$y(x) = x + 3 - \frac{2e^{2x-2}+1}{2e^{2x-2}-1}.$$

Bernoullische Differentialgleichung

DGl-Typ: $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x) = 0, \quad \alpha \neq 0, 1$

Substitution:

$$u(x) := y(x)^{1-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{1-\alpha} u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} u'(x) = \frac{1}{1-\alpha} u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} u'(x)$$

in die DGl einsetzen

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} u'(x) + a(x)u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0$$

Multiplikation mit $(u(x))^{-\alpha/(1-\alpha)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} u'(x) + a(x)u(x) + b(x) = 0$$

$$\Rightarrow \; u'(x) = (\alpha - 1)a(x)u(x) + (\alpha - 1)b(x) \quad \text{(lineare Dgl)}$$

Aufgabe 6:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a) $y' + y + x^2 y^4 = 0$

Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + ay + by^\alpha = y' + y + x^2 y^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4, a = 1, b = x^2$$

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = 1/y^3(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = 1/\sqrt[3]{u(x)}$$

transformierte Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x)$$

$$\Rightarrow \quad u' - 3u = 3x^2$$

allgemeine homogene Lösung: $u_h(x) = Ke^{3x}$ mit $K \in \mathbb{R}$

Spezieller Ansatz für die inhomogene DGL:

$$u_p(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

in die inhomogene Gleichung einsetzen:

$$2ax+b-3(ax^2+bx+c) = -3ax^2+(2a-3b)x+b-3c = 3x^2.$$

Koefizientenvergleich:

$$a = -1,\ b = -2/3,\ c = -2/9$$

spezielle Lösung der inhomogene Gleichung:

$$u_p(x) = -x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}$$

allgemeine Löung der inhomogenen DGL:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ke^{3x} - x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}$$

Rücksubstitution:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{Ke^{3x} - x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}}}$$

b) $y' + xy \;=\; xy^3$

Bernoullische Differentialgleichung:

$y' + xy \;=\; xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \;=\; y' + xy - xy^3 \;=\; y' + ay + by^\alpha$

mit $\quad \alpha = 3\,,\; a(x) = x \quad$ und $\quad b(x) = -x.$

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = 1/y^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$$

transformierte Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x)$$

$$\Rightarrow \quad u' - 2xu \;=\; -2x\,.$$

Die homogene DGl. $u' - 2xu \;=\; 0$ wird gelöst durch

$$u_h(x) = Ce^{x^2}$$

spezielle Lösung der inhomogenen DGl

$$u' - 2xu \;=\; -2x$$

durch Variation der Konstanten:

$$u_p(x) = C(x)e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad u_p(x) = 1.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGl lautet:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ce^{x^2} + 1$$

Rücksubstitution ergibt:

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}.$$

Riccatische Differentialgleichung

DGl-Typ: $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^2(x) = c(x)$

Lösungsmethode:

Finde eine spezielle Lösung $y_0(x)$ und substituiere

$$u(x) := \frac{1}{y(x) - y_0(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = y_0'(x) - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

in die DGl einsetzen:

$$y_0'(x) - \frac{u'(x)}{u^2(x)} + a(x)\left(y_0(x) + \frac{1}{u(x)}\right) + b(x)\left(y_0(x) + \frac{1}{u(x)}\right)^2 = c(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{u'(x)}{u^2(x)} + \frac{a(x)}{u(x)} + \frac{2b(x)y_0(x)}{u(x)} + \frac{b(x)}{u^2(x)} = 0 \qquad \Big| \cdot u^2(x)$$

ergibt die in u transformierte lineare Differentialgleichung

$$u'(x) = (a(x) + 2b(x)y_0(x))\, u(x) + b(x)$$

Aufgabe 7:

Man löse die Differentialgleichung

$$y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t.$$

Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form $y(x) = c$.

Ein Vergleich von

$$y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t$$

mit der Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

ergibt

$$a(t) = 6t - 4\,, \quad b(t) = 3t - 1\,, \quad c(t) = 3 - 3t$$

Ansatz für eine spezielle Lösung der DGL: $\quad y_0(t) = c$

in die Differentialgleichung einsetzen

$$0 + (6t - 4)c + (3t - 1)c^2 = (6c + 3c^2)t - 4c - c^2 = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow \quad 3 = -4c - c^2\,, \quad -3 = 6c + 3c^2$$

$$\Rightarrow \quad 4c + c^2 = 6c + 3c^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2c(1 + c) \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

eine spezielle Lösung ist $\quad y_0(x) = -1$

Substitution:

$$u(t) = \frac{1}{y(t) - y_0(t)} = \frac{1}{y(t) + 1}$$

ergibt die transformierte lineare Differentialgleichung

$$u' = (a + 2by_0)\, u + b = (6t - 4 + 2(3t-1)\,(-1))u + 3t - 1$$

$$\Rightarrow \quad u' + 2u = 3t - 1.$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL: $\quad u_h(t) = c\, e^{-2t}.$

spezielle inhomogenen Lösung: $\quad u_p(t) = m + nt$

Einsetzen in die inhomogene DGL und Koeffizientenvergleich:

$$n + 2(m + nt) = 2nt + n + 2m = 3t - 1$$

$$\Rightarrow \quad 2n = 3\,, \quad n+2m = -1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{5}{4}$$

eine spezielle Lösung: $\quad u_p(t) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\, t$

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung mit $c \in \mathbb{R}$:

$$u(t) = c\, e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} t$$

Rücksubstitution: $\quad y(t) = \dfrac{1}{c\, e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} t} - 1$

Exakte Differentialgleichung

Parametrisiert die Kurve $(x, y(x))^T$ eine Höhenlinie der Funktion Φ, d.h. gilt

$$\Phi(x, y(x)) = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R},$$

dann erhält man durch differenzieren dieser impliziten Gleichung nach x (Kettenregel):

$$\Phi_x(x, y) + \Phi_y(x, y)y' = 0 \;.$$

Liegt der DGl-Typ:

$$g(x, y) + h(x, y)y'(x) = 0$$

vor, so heißt die Differentialgleichung **exakt**, falls es eine Funktion $\Phi(x, y)$ gibt, **Potential** genannt, für die gilt

$$g(x, y) = \Phi_x(x, y) \quad \text{und} \quad h(x, y) = \Phi_y(x, y) \;.$$

Ist Φ eine C^2-Funktion, so gilt $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$.

Ist der zu Grunde liegende Definitionsbereich von g und h einfach zusammenhängend, so erhält man die notwendige und hinreichende **Integrabilitätsbedingung** für die **Exaktheit**

$$g_y(x, y) = h_x(x, y) \;.$$

Potentialkonstruktion durch Integration der partiellen Ableitungen:

1. Schritt: $\Phi_x(x,y) = g(x,y)$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \int g(x,y)dx + \varphi(y)$$

2. Schritt: $\Phi_y(x,y) = h(x,y) \overset{!}{=} \left(\int g(x,y)dx\right)_y + \varphi'(y)$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = h(x,y) - \left(\int g(x,y)dx\right)_y =: f(x,y)$$

Falls $f(x,y) = f(y)$ gilt, bestimmt man

$$\varphi(y) = \int f(y)dy$$

und ein Potential ist berechnet.

Falls $f(x,y)$ auch von x abhängt, dieser Fall tritt jedoch nur für $g_y(x,y) \neq h_x(x,y)$ ein, kann kein Potential berechnet werden.

Aufgabe 8:

Man zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t\, e^y = 0$$

Man löse die Differentialgleichung, wobei eine Lösungsdarstellung durch eine implizite Gleichung ausreicht.

Die Differentialgleichung

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t\, e^y = 0$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung mit

$$g(t, y) = 2t\, e^y\ ,\ h(t, y) = t^2 e^y - 1,$$

denn

$$g_y(t, y) = \frac{d}{dy}\,(2t\, e^y) = 2t\, e^y = \frac{d}{dt}\,(t^2 e^y - 1) = h_t(t, y)$$

Die DGL ist also exakt.

Die implizite Lösungsdarstellung lautet

$$\Phi(t, y(t)) = C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Potentialkonstruktion:

$$\Phi_t = 2t\,e^y \quad \Rightarrow \quad \Phi(t,y) = t^2\,e^y + \varphi(y) \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_y(t,y) = \big(t^2\,e^y + \varphi(y)\big)_y = t^2\,e^y + \varphi'(y) \overset{!}{=} t^2 e^y - 1 = h(t,y)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -y + k \quad \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t,y) = t^2\,e^y - y + k.$$

Die implizite Lösungsdarstellung von $y(t)$ mit $C \in \mathbb{R}$ lautet

$$t^2\,e^y - y = C.$$

Lösungsdarstellung von Φ durch Äquipotentiallinien:

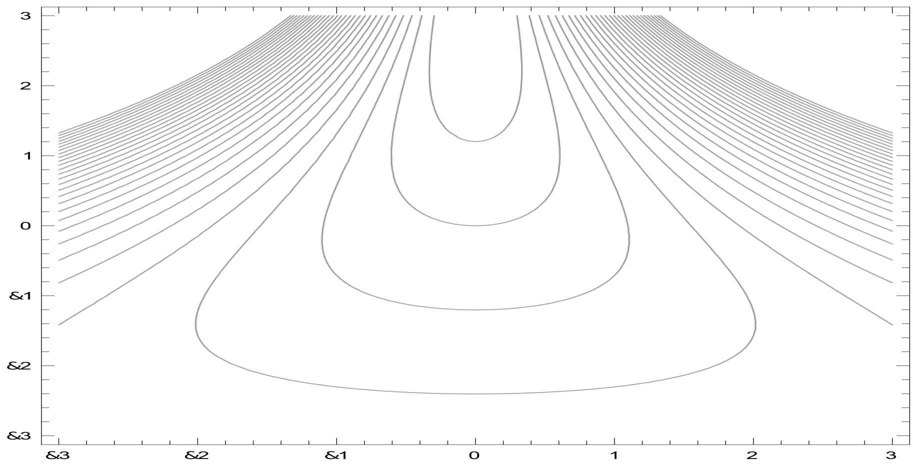

Bild 8 Äquipotentiallinien für $t^2\,e^y - y = C$