

# Differentialgleichungen I

## für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

#### Aufgabe 5:

Durch Substitution löse man die Differentialgleichung

$$y' = (x - y + 3)^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

#### Lösung:

Substitution  $u = x - y + 3 \Rightarrow u(1) = 3$

$$1 - u' = u^2 \Rightarrow u' = 1 - u^2 \Rightarrow \frac{u'}{1 - u^2} = 1, \quad u^2 \neq 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1 - u^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| = \ln \frac{u+1}{u-1} = 2x + 2c, \quad \text{da } u(1) > 1$$

$$u(1) = 3: \quad \ln \frac{u(1)+1}{u(1)-1} = \ln 2 = 2 \cdot 1 + 2c \Rightarrow 2c = \ln 2 - 2$$

$$\Rightarrow \ln \frac{u+1}{u-1} = 2x + 2c = 2x + \ln 2 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{u+1}{u-1} = e^{2x+\ln 2-2} = 2e^{2x-2} \Rightarrow u = \frac{2e^{2x-2} + 1}{2e^{2x-2} - 1}$$

Mit der Rücksubstitution  $y = x + 3 - u$  lautet die Lösung also

$$y(x) = x + 3 - \frac{2e^{2x-2} + 1}{2e^{2x-2} - 1}.$$

**Bernoullische Differentialgleichung**DGI-Typ:  $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x) = 0, \quad \alpha \neq 0, 1$ Substitution:  $u(x) := (y(x))^{1-\alpha}$ 

$$\Rightarrow y(x) = (u(x))^{1/(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{1-\alpha} (u(x))^{\alpha/(1-\alpha)} u'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} (u(x))^{\alpha/(1-\alpha)} u'(x) + a(x)(u(x))^{1/(1-\alpha)} + b(x)(u(x))^{\alpha/(1-\alpha)} = 0 \quad | \cdot (u(x))^{-\alpha/(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} u'(x) + a(x)u(x) + b(x) = 0$$

$$\Rightarrow u'(x) = (\alpha - 1)a(x)u(x) + (\alpha - 1)b(x) \quad (\text{lineare Differentialgleichung})$$

Rücksubstitution:  $y(x) = (u(x))^{1/(1-\alpha)}$ **Aufgabe 6:**

Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a)  $y' + y + x^2y^4 = 0,$

b)  $y' + xy = xy^3.$

**Lösung:**

a) Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + ay + by^\alpha = y' + y + x^2y^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4, a = 1, b = x^2$$

Substitution:

$$u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = 1/y^3(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = 1/\sqrt[3]{u(x)}$$

transformierte Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1 - \alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \quad \Rightarrow \quad u' - 3u = 3x^2$$

allgemeine homogene Lösung:  $u_h(x) = Ke^{3x}$  mit  $K \in \mathbb{R}$

Speziellen Ansatz

$$u_p(x) = ax^2 + bx + c$$

in die inhomogene Gleichung einsetzen

$$2ax + b - 3(ax^2 + bx + c) = -3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = 3x^2.$$

Koeffizientenvergleich:

$$a = -1, b = -2/3, c = -2/9 \quad \Rightarrow \quad u(x) = Ke^{3x} - x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}$$

Rücksubstitution:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{Ke^{3x} - x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}}}$$

b) Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + xy = xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad y' + xy - xy^3 = 0 = y' + ay + by^\alpha$$

mit  $\alpha = 3$ ,  $a(x) = x$  und  $b(x) = -x$ .

Substitution  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$  eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt:

$$u' - 2xu = -2x.$$

Die homogene DGL  $u' - 2xu = 0$  wird durch  $u_h(x) = Ce^{x^2}$  gelöst.

Ein spezielle Lösung der inhomogenen DGL  $u' - 2xu = -2x$  ergibt sich aus der Variation der Konstanten:

$$u_p(x) = C(x)e^{x^2} \Rightarrow C'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow C(x) = e^{-x^2} \Rightarrow u_p(x) = 1.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet:  $u(x) = Ce^{x^2} + 1$ .

Rücksubstitution ergibt:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}.$$

**Riccatische Differentialgleichung**

DGL-Typ:  $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^2(x) = c(x)$

Lösungsmethode:

Finde eine spezielle Lösung  $y_0(x)$  und substituiere  $u(x) := \frac{1}{y(x) - y_0(x)}$ 

$$\Rightarrow y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = y_0'(x) - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

in die DGL einsetzen:

$$y_0'(x) - \frac{u'(x)}{u^2(x)} + a(x) \left( y_0(x) + \frac{1}{u(x)} \right) + b(x) \left( y_0(x) + \frac{1}{u(x)} \right)^2 = c(x)$$
$$\Rightarrow -\frac{u'(x)}{u^2(x)} + \frac{a(x)}{u(x)} + \frac{2b(x)y_0(x)}{u(x)} + \frac{b(x)}{u^2(x)} = 0 \quad | \cdot u^2(x)$$

ergibt die in  $u$  transformierte lineare Differentialgleichung

$$u'(x) = (a(x) + 2b(x)y_0(x)) u(x) + b(x)$$

**Aufgabe 7:**

Man löse die Differentialgleichung  $y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t$ .

*Hinweis:* Es existiert eine Lösung der Form  $y(x) = c$ .

**Lösung:**

Ein Vergleich von

$$y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t$$

mit der Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

ergibt  $a(t) = 6t - 4$  und  $b(t) = 3t - 1$  und  $c(t) = 3 - 3t$ .

Mit  $y_0(t) = c$  versuchen wir eine spezielle Lösung der DGL zu erhalten:

$$0 + (6t - 4)c + (3t - 1)c^2 = (6c + 3c^2)t - 4c - c^2 = 3 - 3t$$

$$\Rightarrow 3 = -4c - c^2, \quad -3 = 6c + 3c^2$$

$$\Rightarrow 4c + c^2 = 6c + 3c^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2c(1 + c) \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

Also ist  $y_0(x) = -1$  eine spezielle Lösung.

Damit ist dann die Substitution  $u(t) = \frac{1}{y(t) - y_0(t)} = \frac{1}{y(t) + 1}$  möglich.

Diese ergibt

$$u' - (6t - 4 + 2(3t - 1)(-1))u = 3t - 1 \quad \Rightarrow \quad u' + 2u = 3t - 1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet  $u(t) = c e^{-2t}$ .

Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL  $u_p(t) = m + nt$

$$u'_p + 2u_p = 2nt + 2m + n = 3t - 1$$

Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow 2n = 3, \quad 2m + n = -1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{5}{4}$$

Also ist  $u_p(t) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}t$  eine spezielle Lösung.

Damit lautet die allg. Lösung der inhomogenen DGL  $u(t) = c e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}t$

Lösung der Riccatischen Differentialgleichung  $y(t) = \frac{1}{c e^{-2t} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}t} - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$

**Exakte Differentialgleichung**

Parametrisiert die Kurve  $(x, y(x))^T$  eine Höhenlinie der Funktion  $\Phi$ , d.h. gilt  $\Phi(x, y(x)) = C$  mit  $C \in \mathbb{R}$ . Differenzieren dieser impliziten Gleichung nach  $x$  ergibt:

$$\Phi_x(x, y) + \Phi_y(x, y)y' = 0.$$

Liegt der

$$\text{DGI-Typ: } g(x, y) + h(x, y)y'(x) = 0$$

vor, so heißt die Differentialgleichung **exakt**, falls es eine Funktion  $\Phi(x, y)$  gibt, **Potential** genannt, für die gilt

$$g(x, y) = \Phi_x(x, y) \quad \text{und} \quad h(x, y) = \Phi_y(x, y).$$

Ist  $\Phi$  eine  $C^2$ -Funktion, so gilt  $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$ . Ist der zu Grunde liegende Definitionsbereich von  $g$  und  $h$  einfach zusammenhängend, so erhält man die notwendige und hinreichende **Integrabilitätsbedingung** für die Exaktheit

$$g_y(x, y) = h_x(x, y).$$

**Potentialkonstruktion** durch Integration der partiellen Ableitungen:

$$1. \text{ Schritt: } \quad \Phi_x(x, y) = g(x, y) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \int g(x, y)dx + \varphi(y)$$

$$2. \text{ Schritt: } \quad \Phi_y(x, y) = h(x, y) \stackrel{!}{=} \left( \int g(x, y)dx \right)_y + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = h(x, y) - \left( \int g(x, y)dx \right)_y =: f(x, y)$$

Falls  $f(x, y) = f(y)$  gilt, bestimmt man  $\varphi(y) = \int f(y)dy$  und ein Potential ist berechnet.

Falls  $f(x, y)$  auch von  $x$  abhängt, dieser Fall tritt jedoch nur für  $g_y(x, y) \neq h_x(x, y)$  ein, so kann kein Potential berechnet werden.

**Aufgabe 8:**

Man zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t e^y = 0$$

Man löse die Differentialgleichung, wobei eine Lösungsdarstellung durch eine implizite Gleichung ausreicht.

**Lösung:**

Die Differentialgleichung

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t e^y = 0$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung mit  $g(t, y) = 2t e^y$  und  $h(t, y) = t^2 e^y - 1$ , denn

$$g_y(t, y) = \frac{d}{dy} (2t e^y) = 2t e^y = \frac{d}{dt} (t^2 e^y - 1) = h_t(t, y).$$

Die DGL ist also exakt und die implizite Lösungsdarstellung lautet

$$\Phi(t, y(t)) = C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Potentialkonstruktion:

$$\Phi_t = 2t e^y \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, y) = t^2 e^y + \varphi(y)$$

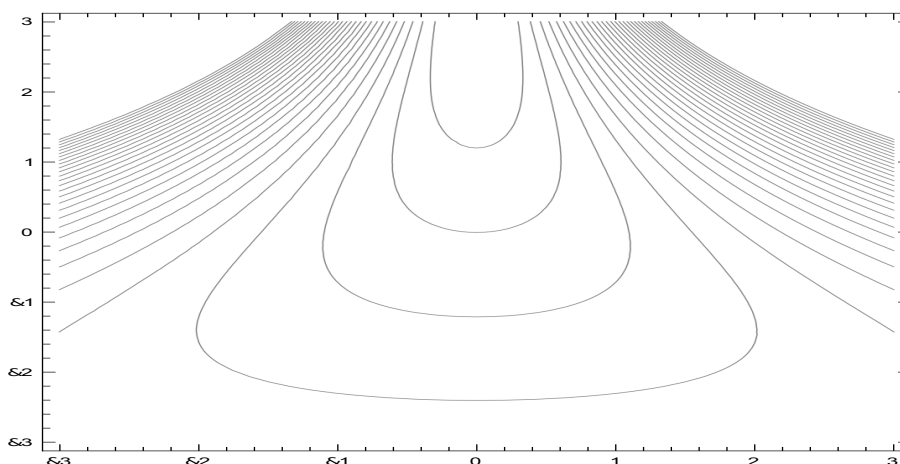
$$\Rightarrow \quad \Phi_y(t, y) = (t^2 e^y + \varphi(y))_y = t^2 e^y + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} t^2 e^y - 1 = h(t, y)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -y + k \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t, y) = t^2 e^y - y + k.$$

Die implizite Lösungsdarstellung von  $y(t)$  lautet  $t^2 e^y - y = C$  mit  $C \in \mathbb{R}$ .

Lösungsdarstellung von  $\Phi$  durch Äquipotentiallinien:



**Bild 8** Äquipotentiallinien für  $t^2 e^y - y = C$