Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Definition:

Eine Gleichung, in der eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen $y = y(x)$ mit ihren Ableitungen bis zur n.ten Ordnung $y'(x), \ldots y^{(n)}(x)$ vertreten ist, wird als **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung** bezeichnet:

a) implizite Form: $F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$,

b) explizite Form: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)})$.

Eine **Lösung** oder auch **Integral** dieser Differentialgleichung ist eine Funktion $y = y(x)$, die eingesetzt in die Differentialgleichung diese erfüllt. Das Lösen einer Differentialgleichung besteht also im Auffinden solcher Funktionen y.

Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Separierbare Differentialgleichungen (Trennung der Variablen)

DGl-Typ: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ mit $g(y) \neq 0$

Lösungsmethode: Trennung von x und y:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Integration mit Substitutionsregel:

$$\Rightarrow \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(\xi)d\xi}{g(y(\xi))} \overset{y=y(\xi)}{=} \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} =: G(y)$$

Auflösen der Stammfunktion G nach y ergibt die Lösung $y(x) = G^{-1}(F(x))$.

(Der Fall $g(x) = 0$ führt auf $y(x) = 0$ und die Differentialgleichung $y'(x) = 0$ ist damit erfüllt.)

Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

DGl-Typ: $\quad y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad$ Substitution: $\quad u(x) := \frac{y(x)}{x}$

$\Rightarrow \quad y(x) = xu(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = u(x) + xu'(x)$

$\Rightarrow \quad u(x) + xu'(x) = f(u(x)) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{f(u) - u}{x} \quad$ (separierbare DGl)

Rücksubstitution: $\quad y(x) = xu(x)$

Aufgabe 1:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $3y' - 2y + 1 = 0\,,$

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Lösung:

a) $3y' - 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3y'}{2y-1} = 1$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3y'(x)}{2y(x)-1}\, dx = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{3dy}{2y-1} = x + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\log|2y-1| = x + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \quad |2y-1| = e^{2(x+\tilde{c})/3} = e^{2x/3}e^{2\tilde{c}/3} = ke^{2x/3} \text{ mit } k > 0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \left(1 \pm ke^{2x/3}\right)/2 = \frac{1}{2} + ce^{2x/3} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Probe:

$$3y'(x) - 2y(x) + 1 = 3\left(\frac{1}{2} + ce^{2x/3}\right)' - 2\left(\frac{1}{2} + ce^{2x/3}\right) + 1$$
$$= 2ce^{2x/3} - 1 - 2ce^{2x/3} + 1 = 0$$

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2y' = -(y+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y'}{(y+1)^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y(x)'}{(y(x)+1)^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad y(x) = -1 - \frac{1}{\frac{1}{x} + c} = -1 - \frac{x}{1+cx}$$

Probe:

$$x^2y'(x) + (y+1)^2 = x^2\left(-1 - \frac{x}{1+cx}\right)' + \left(-\frac{x}{1+cx}\right)^2$$
$$= x^2\left(-\frac{1+cx-xc}{(1+cx)^2}\right) + \frac{x^2}{(1+cx)^2} = 0$$

Aufgabe 2:

a) Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = y^2 - 16$ mit $y(0) = 5$.

b) Man löse die Differentialgleichung $y' = \dfrac{x-y}{x}$.

Lösung:

a) Lösung durch Separation:

$$y' = y^2 - 16 \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y^2-16} = \frac{1}{(y-4)(y+4)} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(y-4)(y+4)}dy = \int \frac{1}{8(y-4)} - \frac{1}{8(y+4)} = \int 1dx$$
$$\Rightarrow \quad \log|y-4| - \log|y+4| = 8x + c \;\Rightarrow\; \frac{y-4}{y+4} = Ce^{8x} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{4+4Ce^{8x}}{1-Ce^{8x}}$$

Mit $y(0) = 5$ wird $C \in \mathbb{R}$ festgelegt: $Ce^0 = C = \dfrac{y(0)-4}{y(0)+4} = \dfrac{5-4}{5+4} = \dfrac{1}{9}$.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet $\quad y(x) = \dfrac{36+4e^{8x}}{9-e^{8x}}$.

b) Ähnlichkeitsdifferentialgleichung: $y' = \dfrac{x-y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$

Substitution $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

$xu' + u = 1 - u \quad \Rightarrow \quad u' = \dfrac{1-2u}{x}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{u'}{2u-1} = -\dfrac{1}{x}, \quad u \neq \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{du}{2u-1} = -\int \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2} \log|2u-1| = -\log|x| + c_1, \quad c_1 = \log c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_2 > 0$

$\Rightarrow \quad \log|2u-1| = 2\log\dfrac{c_2}{|x|} = \log\left(\dfrac{c_2}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad 2u - 1 = \pm\left(\dfrac{c_2}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad u = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_2}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{c_3}{x}, \quad c_3 \neq 0$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung $y(x) = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{c_3}{x}$ mit $c_3 \in \mathbb{R}$.

Der Fall $u(x) = \dfrac{1}{2}$ ist hierin dann enthalten.

Lineare Differentialgleichungen

DGl-Typ: $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$

Die lineare Differentialgleichung heißt homogen für $b(x) = 0$ und sonst inhomogen.

a) Allgemeine Lösung $y_h(x)$ der homogenen Gleichung $y'(x) = a(x)y(x)$ durch Separation bestimmen:

$$y'(x) = a(x)y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

$$\Rightarrow \quad \log|y| = \underbrace{\int a(x)dx}_{=F(x)} + k \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c \cdot e^{F(x)}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

b) Berechnung einer speziellen Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung:

(i) Lösungsansatz **'Variation der Konstanten':** $y_p(x) = c(x)e^{F(x)}$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt die Bestimmungsgleichung für $c(x)$:

$$y_p'(x) = c'(x)e^{F(x)} + c(x)\left(e^{F(x)}\right)' = a(x)c(x)e^{F(x)} + b(x)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x)e^{F(x)} + c(x)\underbrace{\left(\left(e^{F(x)}\right)' - a(x)e^{F(x)}\right)}_{=0} = b(x)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x)e^{F(x)} = b(x) \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{b(x)}{e^{F(x)}}dx + c_1$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = e^{F(x)}\left(\int \frac{b(x)}{e^{F(x)}}dx \underbrace{+c_1}_{=0}\right) = e^{F(x)}\int \frac{b(x)}{e^{F(x)}}dx$$

Nur eine spezielle Lösung wird benötigt, deshalb kann bei der Stammfunktionsbildung die Integrationskonstante $c_1 = 0$ gesetzt werden.

(ii) Für $a \in \mathbb{R}$ durch spezielle an die Inhomogenität $b(x)$ angepasste Ansätze.

$b(x)$	$y_p(x)$
$\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$	$\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^k, \quad a \neq 0$
$b_1\sin(\omega x) + b_2\cos(\omega x)$	$c_1\sin(\omega x) + c_2\cos(\omega x)$
$be^{\lambda x}$	$ce^{\lambda x} \quad \lambda \neq -a$
	$cxe^{\lambda x} \quad \lambda = -a$

c) Lösungsprinzip: Die Summe von allgemeiner homogener und spezieller inhomogener Lösung ergibt die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\ .$$

Aufgabe 3:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4\,,$

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}\ .$

Lösung:

a) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $2y' - 3y = 0$ durch Separation:

$$2y' - 3y = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{3}{2}\,dx \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c \cdot e^{3x/2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = c(x)e^{3x/2}.$$

Die Bestimmungsgleichung für $c(x)$ lautet: $c'(x)e^{3x/2} = b(x)$.

$$2y' - 3y = 4 \;\Rightarrow\; y' - \frac{3y}{2} = 2 \;\Rightarrow\; b(x) = 2$$

$$\Rightarrow\; c'(x)e^{3x/2} = 2 \;\Rightarrow\; c'(x) = 2e^{-3x/2} \;\Rightarrow\; c(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x/2}$$

$$\Rightarrow\; y_p(x) = c(x)e^{3x/2} = -\frac{4}{3}e^{-3x/2}e^{3x/2} = -\frac{4}{3}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{3x/2} - \frac{4}{3}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

b) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung durch Separation:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \log|y| = 2\log|x| + \tilde{c} = \log x^2 + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow\; y_h(x) = cx^2\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten $y_p(x) = c(x)x^2$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit $h(x) = x^3e^{x^2}$durch Variation der Konstanten:

$$c'(x)x^2 = h(x) = x^3e^{x^2} \;\Rightarrow\; c'(x) = xe^{x^2} \;\Rightarrow\; c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\Rightarrow\; y_p(x) = c(x)x^2 = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = cx^2 + \frac{x^2}{2}e^{x^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 4:
Man löse die linearen Differentialgleichungen mit einem speziellen Ansatz für die Inhomogenität:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $5y' + 4y = 3e^{2x} + e^{-x}$.

Lösung:

a) (i) Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $2y' - 3y = 0$ durch Separation:

$$2y' - 3y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{3}{2}\,dx \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c \cdot e^{3x/2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Ein spezieller Ansatz zur Berechnung der inhomogenen Differentialgleichung $2y' - 3y = 4$ lautet:

$$y_p(x) = a.$$

Dieser wird in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$4 = 2y_p'(x) - 3y_p(x) = 2(a)' - 3a = -3a \Rightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Eine spezielle inhomogene Lösung lautet $y_p(x) = -\frac{4}{3}$.

(iii) Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{3x/2} - \frac{4}{3}.$$

b) (i) Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $5y' + 4y = 0$ durch Separation

$$5y' + 4y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{4}{5}\,dx \Rightarrow \log|y| = -\frac{4x}{5} + K.$$

Auflösen nach y ergibt $y_h(x) = Ce^{-4x/5}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

(ii) Ein spezieller Ansatz zur Berechnung der inhomogenen Differentialgleichung $5y' + 4y = 3e^{2x} + e^{-x}$ lautet:

$$y_p(x) = ae^{2x} + be^{-x}.$$

Dieser wird in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} 3e^{2x} + e^{-x} &= 5(ae^{2x} + be^{-x})' + 4(ae^{2x} + be^{-x}) \\ &= (10a + 4a)e^{2x} + (4b - 5b)e^{-x} \\ &= 14ae^{2x} - be^{-x}. \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhält man

$$14a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{14}, \quad 1 = -b \Rightarrow b = -1.$$

Eine spezielle inhomogene Lösung lautet $y_p(x) = \frac{3}{14}e^{2x} - e^{-x}$.

(iii) Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-4x/5} + \frac{3}{14}e^{2x} - e^{-x}.$$