Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 18/19
28.01.2019

Klausurberatung Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren berechnen,
- Lineare Gleichungssysteme lösen (braucht man zum Beispiel für Eigenvektoren, Hauptvektoren, Parameter aus allgemeiner Lösung mittels Anfangswerte berechnen, Variation der konstanten)
- Einfache Integrale (separierbare Differentialgleichung , Variation der Konstanten)
- **4 on top Punkte:** Nicht lange rechnen!

(A) Sei M := Menge der Lösungen von $(\dot{x}(t))^{2} + a\,\dot{x}(t) + b \cdot x(t) = 0$

Belegen/Widerlegen Sie: M ist ein linearer Raum der Dimension 2.

Nein! Die Dgl ist nichtlinear!

(B) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann kann

$$\left\{ e^{1t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

ein Fundamentalsystem für $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ sein.

Nein! Die Vektoren müssten aus $\mathbb{R}^3$ sein.

und

$$\Bigg\{ \underbrace{e^{1t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{x^{[1]}(t)},\ \underbrace{e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{x^{[2]}(t)},\ \underbrace{e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{x^{[3]}(t)} \Bigg\}\ ?$$

Dimension stimmt: 3 Lösungen $e^{\lambda t} v$ mit $v \in \mathbb{R}^3$

$\rightarrow$ prüfe lineare Unabhängigkeit

$$W(t) = \det\left(x^{[1]}(t),\ x^{[2]}(t),\ x^{[3]}(t)\right)$$

$$W(0) = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 0 \quad \lightning \text{ kein Fundamentalsystem}$$

irgendein t

c) Stimmt die Aussage: Falls $x \circ\!\!-\!\!\bullet X(t)$. Dann geht die Anfangswertaufgabe $\dot{x}(t) - 2x(t) = \sin(t)\cos(2t) \quad x(0)=1$

geht durch die Laplace-Transformation über in:

$$\underbrace{sX - 1 - 2\cdot X}_{\checkmark} = \underbrace{\frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}}_{} \; ?$$

Begründung?

$x \circ\!\!-\!\!\bullet X$

$\dot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet sX - x(0)$

$= sX - 1$

linke Seite stimmt

rechte Seite ist falsch

zwar gilt: $\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2+1^2}$

und $\cos(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+2^2}$

aber nicht
$$\begin{matrix} f \circ\!\!-\!\!\bullet F \\ g \circ\!\!-\!\!\bullet G \end{matrix} \Longrightarrow f\cdot g \circ\!\!-\!\!\bullet F\cdot G$$

Wichtigste Themen

- Lineare Systeme $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t)$

  - **Mit variablen Koeffizienten:**
    - Homogenes System:
      Wir kennen keine allgemeine Methode zur bestimmung eines Fundamentalsystems.
      Wir können ein Menge von Funktionen darauf prüfen, ob sie ein Fundamentalsystem bilden.

    - Inhomogenes System $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t)$
      Bei bekanntem Fundamentalsystem können wir $\boldsymbol{x}_p$ über Variation der Konstanten berechnen.
      Keine systematischen speziellen Ansätze bekannt!

    Passende Aufgaben: Blätter 3: H1, P1

– **Mit Konstanten Koeffizienten:** $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t)$

* Homogenes System:
  Fundamentalsystem berechnen, allgemeine Lösung des homogenen Systems,
  eventuell umrechnen von komplex in reell
* Inhomogenes System $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t)$

  Spezieller Ansatz $\boldsymbol{x}_p(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ für partikuläre Lösung der

  inhomogenen Gleichung bei $\boldsymbol{h}(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. auch $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{0 \cdot t}$
* Sonst: Variation der Konstanten für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

– Parameter in allgemeiner Lösung mit Hilfe von Anfangswerten bestimmen

Passende Aufgaben: Blätter 4

- Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
  - Gegebene Menge von Funktionen = Fundamentalsystem?
  - Allgemeine Lösung für homogene Gleichung x
  - Partikuläre Lösung für inhomogenes Problem: spezielle Ansätze x
  - Nur wenn spezielle Ansätze nicht gehen, muss Matrixschreibweise und Variation der Konstanten für das äquivalente System verwendet werden.

  Passende Aufgaben: Blätter 5: P1, H1

- Laplace-Transformation
  - Transformation mit Hilfe der Tabellen aus HÜ 5 in den Bildraum XX
  - Gleichung im Bildraum lösen
  - Vorbereitung der Rücktransformation: e-Funktionen und Verschiebungen ausblenden, Rest zerlegen (PBZ)
  - Rücktransformation mit Hilfe der Tabellen aus HÜ 5

  Nur ganz einfache Fälle

  Passende Aufgaben: Blätter 5: P2, H2 Beipiel?

Gesucht Lösung x einer Differentialgleichung n-ter Ordnung. Wir nennen die Laplacetransformierte X. Es gilt also $x \circ\!\!-\!\!\bullet X$. Dann gilt

$$\dot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet sX - x(0)$$

$$\ddot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet s^2X - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\dddot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet s^3X - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)$$

Falls $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$, dann gilt

$I)$	$h_a(t)f(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa}F(s)$	Verschiebung im Originalraum Mult. mit exp-Fkt im Bildraum
$II)$	$e^{at}f(t)$ $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im Originalraum
$III)$	$(-t)^n f(t)$ $n \in \mathbb{N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^{(n)}(s)$	exp-Fkt im Originalraum Ableitungen im Bildraum Mult. mit t^n im O–Raum

Bsp: $\dddot{x} - 2\dot{x} = 3t^2 e^{-6t} \underbrace{\cos(4t)}_{f(t)}$

$x(0) = 1$

$\dot{x}(0) = 2$

$\ddot{x}(0) = 3$

$s^3 X - s^2 - 2s - 3 - 2(sX - 1) = ?$

$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{s}{s^2+4^2} = F(s)$

$x \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X$

$\dot{x} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sX - x(0) = sX - 1$

$\ddot{x} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s(sX-1) - \dot{x}(0) = s^2 X - s - 2$

$\dddot{x} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s(s^2X - s - 2) - \ddot{x}(0) = s^3 X - s^2 - 2s - 3$

$g(t) := e^{-6t} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s-(-6)) = \dfrac{(s+6)}{(s+6)^2+4^2} = G(s)$

$3\,t^2 g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 3(G(s))'' = 3\left(\dfrac{s+6}{(s+6)^2+16}\right)''$

AWA $\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^3 X - s^2 - 2s - 3 - 2(sX-1) = 3\left(\dfrac{s+6}{(s+6)^2+16}\right)''$

Bsp
PBZ

$\dfrac{s+7}{\underbrace{s^2+6s+13}_{\text{keine reelle Nullstellen}}} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; ?$

$\dfrac{s+7}{(s+3)^2+4} = c \cdot \dfrac{s+3}{(s+3)^2+2^2} + \dfrac{k}{(s+3)^2+2^2}$ mit $c=1$, $k=4$

$= e^{-3t}\cos(2t) + 2\,e^{-3t}\sin(2t)$

- denn $\dfrac{s}{s^2+2^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \cos(2t)$ $\quad \dfrac{2}{s^2+2^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sin(2t)$.

mit $$h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a, \\ 0 & t < a. \end{cases}$$

$f(t)$ für $t \geq 0$	F	σ
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	Re (a)
$\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0

- Separierbare $\dot{x}(t) = g(t) \cdot h(x(t))$

  und lineare Einzeldifferentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$

  Hier für die inhomogene: Variation der Konstanten!

  Gut als Ergänzung zu anderen Aufgaben.

  Passende Aufgaben: Blätter 2: P1, P2, H1 nach Substitution

- Stabilität

  – Matrixschreibweise für Differentialgleichung 2. oder 3. Ordnung
  – Linearer Fall EWe
  – Nichtlinear: Linearisierung oder Ljapunov
  EWe Jf

  Passende Aufgaben: Blätter 6

- **Blätter 1:**
  - Aufgabe B1-P1, P2: Modellierung, Lösung bei gegebenem Ansatz verifizieren/finden. $\emptyset$
  - Aufgabe B1-H1: Modellierung, $\emptyset$
  - Aufgabe B1-H2: Bernoulli Differentialgleichung , nach Substitution: linear

    $\dot{u} = -6u - 9$
    zu einfach

- **Blätter 2:**
  - Aufgabe B2-P1: separierbare Dgl.

    xxx
    gute kleine Aufgaben

  - Aufgabe B2-P2: lineare Dgl., spezielle Ansätze für inhomogene lineare Dgl., Variation der Konstanten
  - Aufgabe B2-H1: Umschreiben (*) auf System

    (*) von Dgl. zweiter oder dritter Ordnung
    WZ

  - Aufgabe B2-H2: nach Substitution separierbar, Anfangswertaufgabe, Existenz- und Eindeutigkeitssatz $\emptyset$

    $\hookrightarrow (t^4 - 1)\dot{u} = 4t^3(u-2)$
    xxx

- **Blätter 3:**

  - Aufgabe B3-P1: Lineares System, variable Koeffizienten
    Gegebene Menge von Funktionen = Fundamentalsystem? sind die Fkt'n Lösungen? $W(t^*) \neq 0$ $= \det(\text{"Fund.syst"})$
    Variation der Konstanten, xx
    Anfangswerte

  - Aufgabe B3-P2: Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren WZ

  - Aufgabe B3-H1: Lineares System, variable Koeffizienten
    Fundamentalsystem mit Hilfe gegebener Ansätze bestimmen, $\emptyset$
    Variation der Konstanten, xx
    Anfangswerte

  - Aufgabe B3-H2: Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren WZ

- **Blätter 4:**
  - Aufgabe B4-P1: Lineares System, konstante Koeffizienten, homogen, AWA
  - Aufgabe B4-P2: Lineares System, konstante Koeffizienten, inhomogen, komplexe Eigenwerte, spezieller Ansatz
  - Aufgabe B4-H1: Lineares System, konstante Koeffizienten, mehrfache Eigenwerte, komplexe Eigenwerte, Hauptvektoren nötig, Variation der Konstanten
  - Aufgabe B4-H2: Modellierung Wassertanks $\longrightarrow$ System mit konstanten Koeffizienten ∉

xxx

- **Blatt 5:**
  - Aufgabe B5-P1: Dgl. 2. Ordnung, Umschreiben auf System, Variation der Konstanten

xxx

  - Aufgabe B5-P2: a)i-iii, $b(t)$ gegeben, Laplace-Transformierte berechnen mit Hilfe der Tabelle i, ii) xxx iii) sinh(t).... ∉
    a) iv) Laplace über uneigentliches Integral ∉

b) i) Rücktransformation über Interpretation als Ableitung ∅

b) ii) Rücktransformation über PBZ xx

xxx
- Aufgabe B5-H1: Differentialgleichung 3. Ordnung, konstante Koeffizienten, spezielle Ansätze
- Aufgabe B5-H2: Dgl. 2. Ordnung mit Laplace-Transformation lösen.

xxx

Jeweils nur Teile. Insbesondere Hintransformation AWA ?

- **Blätter 6:**
  - Aufgabe B6-P1: Stabilität lineares System bzw. xxx
    alle Ruhelagen eines nichtlinearen 1x1 Systems bestimmen und auf Stabilität prüfen x
  - Aufgabe B6-P2a: Stabilität nicht linear, Jacobi-Matrix untersuchen xxx
  - Aufgabe B6-P2b: System nicht linear, Ljapunov
  - Aufgabe B6-H1: Stabilität lineare Systeme xxx
  - Aufgabe B6-H2: Stabilität, nichtlineare Dgl. 2. Ordnung, Umschreiben auf System, dann Jacobi xxx