

Klausurberatung Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Eigenwerte, Eigenvektoren, Hauptvektoren berechnen,
- Lineare Gleichungssysteme lösen (braucht man zum Beispiel für Eigenvektoren, Hauptvektoren, Parameter aus allgemeiner Lösung mittels Anfangswerte berechnen, Variation der konstanten)
- Einfache Integrale (separierbare Differentialgleichung , Variation der Konstanten)
- **4 on top Punkte:** Nicht lange rechnen!

Wichtigste Themen

- Lineare Systeme $\dot{x} = A(t)x + h(t)$
 - **Mit variablen Koeffizienten:**
 - * Homogenes System:
Wir kennen keine allgemeine Methode zur Bestimmung eines Fundamentalsystems.
Wir können eine Menge von Funktionen darauf prüfen, ob sie ein Fundamentalsystem bilden.
 - * Inhomogenes System $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
Bei bekanntem Fundamentalsystem können wir x_p über Variation der Konstanten berechnen.
Keine systematischen speziellen Ansätze bekannt!

Passende Aufgaben: Blätter 3: H1, P1

- **Mit Konstanten Koeffizienten:** $\dot{x} = A x + h(t)$
 - * Homogenes System:
Fundamentalsystem berechnen, allgemeine Lösung des homogenen Systems,
eventuell umrechnen von komplex in reell
 - * Inhomogenes System $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
Spezieller Ansatz $x_p(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ für partikuläre Lösung der
inhomogenen Gleichung bei $h(t) = e^{\mu t} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
 - * Sonst: Variation der Konstanten für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung
- Parameter in allgemeiner Lösung mit Hilfe von Anfangswerten bestimmen

Passende Aufgaben: Blätter 4

- Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
 - Gegebene Menge von Funktionen = Fundamentalsystem?
 - Allgemeine Lösung für homogene Gleichung
 - Partikuläre Lösung für inhomogenes Problem: spezielle Ansätze
 - Nur wenn spezielle Ansätze nicht gehen, muss Matrixschreibweise und Variation der Konstanten für das äquivalente System verwendet werden.

Passende Aufgaben: Blätter 5: P1, H1

- Laplace-Transformation
 - Transformation mit Hilfe der Tabellen aus HÜ 5 in den Bildraum
 - Gleichung im Bildraum lösen
 - Vorbereitung der Rücktransformation: e-Funktionen und Verschiebungen ausblenden, Rest zerlegen (PBZ)
 - Rücktransformation mit Hilfe der Tabellen aus HÜ 5

Passende Aufgaben: Blätter 5: P2, H2 Beispiel?

Gesucht Lösung x einer Differentialgleichung n-ter Ordnung. Wir nennen die Laplacetransformierte X . Es gilt also $x \circ \bullet X$. Dann gilt

$$\dot{x} \circ \bullet sX - x(0)$$

$$\ddot{x} \circ \bullet s^2X - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\dddot{x} \circ \bullet s^3X - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)$$

Falls $f \circ \bullet F$, dann gilt

$$I) \quad h_a(t)f(t-a) \quad \circ \bullet \quad e^{-sa}F(s)$$

Verschiebung im Originalraum
Mult. mit exp-Fkt im Bildraum

$$II) \quad e^{at}f(t) \quad \circ \bullet \quad F(s-a)$$

$$a \in \mathbb{C}$$

Verschiebung im
Bildraum/ Mult. mit
exp-Fkt im Originalraum
exp-Fkt im Originalraum
Ableitungen im Bildraum
Mult. mit t^n im O-Raum

$$III) \quad (-t)^n f(t) \quad \circ \bullet \quad F^{(n)}(s)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

| $f(t)$ für $t \geq 0$ | F | σ |
|---|---------------------------------|------------------------|
| 1 d.h. $h_0(t)$ | $\frac{1}{s}$ | 0 |
| $h_a(t)$ | $e^{-as} \frac{1}{s}$ | 0 |
| $t^n, \quad n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | 0 |
| $e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$ | $\frac{1}{s - a}$ | $\operatorname{Re}(a)$ |
| $\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | 0 |
| $\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | 0 |

mit
$$h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a, \\ 0 & t < a. \end{cases}$$

- Separierbare $\dot{x}(t) = g(t) \cdot h(x(t))$

und lineare Einzeldifferentialgleichung $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$

Hier für die inhomogene: Variation der Konstanten!

Gut als Ergänzung zu anderen Aufgaben.

Passende Aufgaben: Blätter 2: P1, P2, H1 nach Substitution

- Stabilität
 - Matrixschreibweise für Differentialgleichung 2. oder 3. Ordnung
 - Linearer Fall
 - Nichtlinear: Linearisierung oder Ljapunov

Passende Aufgaben: Blätter 6

- **Blätter 1:**

- Aufgabe B1-P1, P2: Modellierung, Lösung bei gegebenem Ansatz verifizieren/finden.
- Aufgabe B1-H1: Modellierung,
- Aufgabe B1-H2: Bernoulli Differentialgleichung , nach Substitution: linear

- **Blätter 2:**

- Aufgabe B2-P1: separierbare Dgl.
- Aufgabe B2-P2: lineare Dgl., spezielle Ansätze für inhomogene lineare Dgl., Variation der Konstanten
- Aufgabe B2-H1: Umschreiben auf System
- Aufgabe B2-H2: nach Substitution separierbar, Anfangswertaufgabe, Existenz- und Eindeutigkeitssatz

- **Blätter 3:**

- Aufgabe B3-P1: Lineares System, variable Koeffizienten
Gegebene Menge von Funktionen = Fundamentalsystem?
Variation der Konstanten,
Anfangswerte
- Aufgabe B3-P2: Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren
- Aufgabe B3-H1: Lineares System, variable Koeffizienten
Fundamentalsystem mit Hilfe gegebener Ansätze bestimmen,
Variation der Konstanten,
Anfangswerte
- Aufgabe B3-H2: Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren

- **Blätter 4:**

- Aufgabe B4-P1: Lineares System, konstante Koeffizienten, homogen, AWA
- Aufgabe B4-P2: Lineares System, konstante Koeffizienten, inhomogen, komplexe Eigenwerte, spezieller Ansatz
- Aufgabe B4-H1: Lineares System, konstante Koeffizienten, mehrfache Eigenwerte, komplexe Eigenwerte, Hauptvektoren nötig, Variation der Konstanten
- Aufgabe B4-H2: Modellierung Wassertanks \longrightarrow System mit konstanten Koeffizienten

- **Blatt 5:**

- Aufgabe B5-P1: Dgl. 2. Ordnung, Umschreiben auf System, Variation der Konstanten
- Aufgabe B5-P2: a) i-iii, $b(t)$ gegeben, Laplace-Transformierte berechnen mit Hilfe der Tabelle
a) iv) Laplace über uneigentliches Integral

- b) i) Rücktransformation über Interpretation als Ableitung
- b) ii) Rücktransformation über PBZ
- Aufgabe B5-H1: Differentialgleichung 3. Ordnung, konstante Koeffizienten, spezielle Ansätze
- Aufgabe B5-H2: Dgl. 2. Ordnung mit Laplace-Transformation lösen.

- **Blätter 6:**

- Aufgabe B6-P1: Stabilität lineares System bzw. **alle** Ruhelagen eines nichtlinearen 1×1 Systems bestimmen und auf Stabilität prüfen
- Aufgabe B6-P2a: Stabilität nicht linear, Jacobi-Matrix untersuchen
- Aufgabe B6-P2b: System nicht linear, Ljapunov
- Aufgabe B6-H1: Stabilität lineare Systeme
- Aufgabe B6-H2: Stabilität, nichtlineare Dgl. 2. Ordnung, Umschreiben auf System, dann Jacobi