

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge des Stoffes $S(t)$ zum Zeitpunkt t und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes. Es seien

$V :=$ Volumen $K :=$ Sättigungskonzentration,

$K_0 :=$ Anfangskonzentration $S(t) :=$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt t ,

$S_0 := S(0) =$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt Null (Anfangswert),

$K_0 + \frac{S_0 - S(t)}{V} :=$ Konzentration des Stoffes S zum Zeitpunkt t ,

$\gamma :=$ Proportionalitätskonstante.

a) Beschreiben Sie den Auflösungsprozess durch eine Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Daten

$S_0 = 10$ kg, $V = 100$ lit, $K = 0.25$ kg/lit, $K_0 = 0$ kg/lit, $\gamma = 4$ lit/(kg · sek.).

Benutzen Sie die aus der Vorlesung für logistisches Wachstum bekannte Substitution $u = S^{-1}$.

c) (Freiwillige Zusatzaufgabe) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe des Matlab-Befehls ode45 numerisch. Informieren Sie sich mit Hilfe des Befehls

```
>> help ode45
```

Vergleichen Sie graphisch Ihre exakte Lösung mit der von Matlab gelieferten Lösung.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(t) = \alpha \cdot y(t) + \frac{\beta - y(t)}{t}$ mit festen reellen Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Substitution $u(t) := t \cdot y(t)$ zur Differentialgleichung

$$u'(t) = \alpha \cdot u(t) + \beta$$

für u führt.

- b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -2y + \frac{3-y}{t}$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$.
- c) Überprüfen Sie die Richtigkeit der Lösung aus Teil b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangsbedingung.

Abgabetermine: 31.10.-04.11.2016 bzw. 14.11.-18.11.2016