Aufgabe 1: (1+1+1+1 Punkte)

Für jede Aussage in den Teilaufgaben kreuze man alle richtigen Antwortmöglichkeiten an. Es kann auch mehrere richtige Antwortmöglichkeiten geben.

a) Die Differenz zweier Lösungen einer linearen Differentialgleichung ergibt eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

- [ ] Ja
- [ ] Nein
- [ ] Dies gilt nur für homogene Gleichungen.

b) Eine Fundamentalmatrix für eine lineare Differentialgleichung besteht aus Lösungen der homogenen und der inhomogenen Gleichung.

- [ ] Ja
- [ ] Nein
- [ ] Nein, nur aus linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung.

c) Gegeben sei ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanter reeller $n \times n$ Matrix. Alle Eigenwerte haben negative Realteile. Dann ist die Nulllösung asymptotisch stabil.

- [ ] Ja
- [ ] Nein
- [ ] Nein, nur falls die Matrix diagonalisierbar ist.

d) Gegeben sei ein nichtlineares autonomes System $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ mit $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Es gibt mindestens einen Eigenwert mit verschwindendem Realteil. Dann ist die Nulllösung in jedem Fall instabil.

- [ ] Ja
- [ ] Nein
- [ ] Ja, falls der Eigenwert einfach ist.

Aufgabe 2: (2+6 Punkte)

a) Durch Trennung (Separation) der Variablen löse man die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2xy \quad \text{mit} \quad y\,(0) = 3.$$

b) Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wie verhält sich die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $\boldsymbol{y}(0) = (2, -3)^T$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 3: (4+4 Punkte)

a) Man berechne für das nichtlineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2 - x \\ \dot{y} &= (y+1)(x-4) \end{aligned}$$

alle stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten.

b) Für die lineare Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 2x - 4$$

berechne man die allgemeine Lösung und löse damit die zugehörige Randwertaufgabe mit den Randwerten $y(0) = 0$ und $y(1) = 3$.