

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Man bestimme alle stationären Punkte des folgenden Differentialgleichungssystems und untersuchen Sie diese auf Stabilität:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1(4 - y_1 - y_2) \\ y_2' &= y_2(-2 + y_1 - y_2).\end{aligned}$$

Aufgabe 18:

Man untersuche die stationären Punkte der folgenden Differentialgleichungssysteme auf Stabilität unter Verwendung der Stabilitätssätze III und IV.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y' = -yz^2 + y^3 & \text{b) } y' = -yz^2 - y^3 \\ z' = zy^2 + z^3 & z' = zy^2 - z^3 \end{array}$$

Tipp: Man bestimme jeweils eine Ljapunov-Funktion der Form $V(y, z) = ay^2 + bz^2$.

Aufgabe 19:

Man bestimme alle Lösungen der folgenden Randwertaufgaben:

- a) $y'' + y = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$,
- b) $y'' + y = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = 1$, $y(\pi) + y'(\pi) = 0$,
- c) $y'' + y = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = \pi^2 - 3$.

Aufgabe 20:

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 7y_1 + 4y_3, & y_1(0) - y_1(b) &= 5, \\ \dot{y}_2 &= 8y_1 + 3y_2 + 8y_3, & y_2(0) + 2y_2(b) &= 1, \\ \dot{y}_3 &= -8y_1 - 5y_3, & y_3(0) - y_3(b) &= 2. \end{aligned}$$

- a) Man gebe die Aufgabe in Matrixschreibweise an und bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.
- b) Man bestimme alle $b \in \mathbb{R}$, für die die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist und gebe im Falle der nichteindeutigen Lösbarkeit alle Lösungen an!

Abgabetermin: 11.01. - 15.01.10 (zu Beginn der Übung)