

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 5

### Aufgabe 1:

Die folgende Differentialgleichung beschreibt näherungsweise die Bewegung eines gedämpften Schwingers:

$$m \cdot x''(t) + r \cdot x'(t) + d \cdot x(t) = 0.$$

Hierbei stehen  $m$  für die Masse,  $r$  für den Reibungskoeffizienten und  $d$  für die Federkonstante der rückstellenden Federkraft. Die Koeffizienten werden üblicherweise als konstant angenommen. Nehmen zum Beispiel die Masse und/oder der Reibungskoeffizient zeitabhängig (etwa in Folge von Vereisung des Schwingers) zu, so erhält man eine Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten.

Im folgenden modellieren wir eine monotone Zunahme des Reibungskoeffizienten ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$  durch die Wahl  $r(t) = 4t$  und eine monotone Zunahme der Masse durch die Multiplikation von  $m$  mit  $(1 + t^2)$ , und erhalten für  $m = 1$ ,  $d = 2$  die Gleichung

$$(1 + t^2)x''(t) + 4t \cdot x'(t) + 2 \cdot x(t) = 0.$$

- Zeigen Sie, dass  $x^{[1]}(t) := \frac{t}{1 + t^2}$  eine Lösung dieser Gleichung ist.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsansatzes eine zweite (von  $x^{[1]}(t)$  unabhängige) Lösung und damit ein Fundamentalsystem.

### Aufgabe 2:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = t y + t, \quad y(0) = 1.$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens mit den Schrittweiten  $h = 0.5$  bzw.  $\tilde{h} = 0.25$  Näherungen für  $y(1)$ . Verwenden Sie zum Vergleich das verbesserte Polygonzug-Verfahren mit den Schrittweiten  $h = 0.5$  bzw.  $\tilde{h} = 0.25$ .
- Lösen Sie die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch und berechnen Sie den exakten Wert  $y(1)$ .
- Fertigen Sie eine Skizze an, in der Sie die exakte Lösung mit den numerischen Lösungen vergleichen.

**Aufgabe 3:**

Gegeben seien zwei Wassertanks  $T_1$  und  $T_2$ . Der Tank  $T_1$  sei mit 3000 Litern Wasser und der Tank  $T_2$  mit 5000 Litern Wasser gefüllt. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  seien in jedem Tank 100 Kilogramm Salz aufgelöst. Für  $t \geq 0$  werden pro Sekunde 10 Liter Salzlösung von Tank 1 in Tank 2 und 10 Liter Salzlösung von Tank 2 in Tank 1 gepumpt. Es findet eine sofortige Durchmischung statt.

Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem für die in den Tanks enthaltenen Salzmengen  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  auf.

Stabilisieren sich die Salzmengen nach ihrem Modell auf festen Niveaus? Stabilisieren sich die Salzmengen nach ihrem Modell für beliebig große Tanks und beliebige Austauschraten (hier  $10/3000$ ,  $10/5000$ )?

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei das lineare System  $y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2\epsilon \\ 0 & -1 + \epsilon & 0 \\ -2\epsilon & -1 & -2 \end{pmatrix} y$ . Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes  $(0, 0, 0)^T$  in Abhängigkeit von dem Parameter  $\epsilon \in \mathbb{R}$ .

**Abgabetermine:** 12.01-16.01.2009