Gegenwertaufgaben 02.02.09

$L[y](t) := -(p\, y'(t))' + q\, y(t)$

Finde $y \in C^2([a,b])$ mit

$L[y] = \lambda y$ und

$y(a) = 0$, $y(b) = 0$

heißt Sturm-Liouville EW Aufgabe.

Hier OE $a = 0$, $b = 1$, d.h. $[a,b] = [0,1]$

$p \in C^1([a,b])$, $q \in C^0([a,b])$ und

$\lambda \in \mathbb{R}$

<u>Bsp</u>: $-(py')' = -p'y' - py''$

mit $p \equiv 1$, $q \equiv 0$

① $-y'' = \lambda y$ in $(0,1)$

$\lambda \overset{!}{>} 0$

$y(0) = y(1) = 0$

Char. Polynom (in μ)

$-(\mu^2 + \lambda) = 0$

$\Rightarrow \mu_{1/2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

Damit reelle Lösungen (FS)

$y_1(t) = \cos\sqrt{\lambda}\, t$, $y_2(t) = \sin\sqrt{\lambda}\, t$

Allgemeine Lösung:

$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

Mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$ ergibt sich

$y(0) = 0 = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, 0 + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, 0$

$= c_1 \rightarrow c_1 = 0$

020209

$y(1) = c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$, falls

i.) $\lambda = 0 \Rightarrow y \equiv 0$

triviale Lösung

ii) $\sqrt{\lambda} = k\pi$, d.h. $\lambda_k = k^2\pi^2$

Damit erfüllt

$y_k(t) = c \sin\sqrt{\lambda_k}\, t$

die DGL $-y'' = \lambda_k y$, $y(0) = y(1) = 0$.

λ_k sind Eigenwerte, y_k Eigenfunktionen.

Andere Randbedingungen: $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$

② Damit

$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

$= c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$

$y'(t) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda}\, t$

$y'(0) = 0 = c_2 \sqrt{\lambda}$

$\xrightarrow{\lambda \neq 0} c_2 = 0$

$y(1) = c_1 \cos\sqrt{\lambda} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ i.) $c_1 = 0$ triviale Lösung

ii) $\sqrt{\lambda_k} = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$

bzw $\lambda_k = \frac{1}{4}(2k+1)^2\pi^2$

und $y_k(t) = c \cos\sqrt{\lambda_k}\, t$.

02.02.09

Eigenschaften von Eigenfunktionen

Skalarprodukt für Funktionen:

$f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$

$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

ist Skalarprodukt Lin Alg

Seien $y^1 \neq y^2$ Eigenfunktionen zu Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ der Aufgabe

$-y'' = \lambda y$ in $(0,1)$

$y(0) = y(1) = 0$

Beh.: $\int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt = 0$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ (kann gilt ja

③

$y^1(t) = c_1 \sin k\pi t$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$y^2(t) = c_1 \sin l\pi t$ für ein $l \in \mathbb{N}$

mit $\underbrace{\lambda_k = k^2\pi^2}_{\hat{=}\ \lambda_1}$; $\underbrace{\lambda_l = l^2\pi^2}_{\hat{=}\ \lambda_2}$

Damit gilt

$$\int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt = \int_0^1 y^1(t)\, (-\lambda_2\, y^{2''}(t))\, dt$$

$$= -\lambda_2 \int_0^1 y^1(t)\, y^{2''}(t)\, dt$$

$$\overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \lambda_2 \left[\int_0^1 y^{1'}(t)\, y^{2'}(t)\, dt - \underbrace{y^1 y^{2'} \Big|_0^1}_{=0} \right]$$

$$= \lambda_2 \int_0^1 y^{1'}(t)\, y^{2'}(t)\, dt$$

$$\overset{\text{part.}}{\underset{\text{Integration}}{=}} -\lambda_2 \left[\int_0^1 y^{1''}(t)\, y^2(t)\, dt - \underbrace{y^{1'} y^2 \Big|_0^1}_{=0} \right]$$

$$= -\lambda_2 \int_0^1 y^{1''}(t)\, y^2(t)\, dt$$

020209

$$= -\lambda_2 \int_0^1 -\lambda_1\, y^1(t)\, y^2(t)\, dt$$

$$= \lambda_2 \lambda_1 \int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt$$

$$\Rightarrow (1-\lambda_2\lambda_1) \int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt = 0$$

$$\rightarrow \int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt = 0$$

Eigensysteme, wie hier

$$\{ \sin k\pi t \}_{k \in \mathbb{N}}$$

Sind in der Praxis sehr wichtig.

Entwicklung von Funktionen in Eigensystemen: Sei $f \in C^\circ([0,1])$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, y_k \rangle\, y_k(t),$$

(4) mit f, welches RB erfüllt.
wobei $\{y_k\}$ orthonormiertes Eigensystem zu

$$L[y] = \lambda y \quad \text{in } (0,1)$$

und
$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0$$
$$\alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0$$

Orthonormal: $\langle y_k, y_k \rangle = 1 \quad \forall k$,

d.h. $\|y_k\| := \langle y_k, y_k \rangle^{1/2}$
$$= \left(\int_0^1 |y_k(t)|^2\, dt \right)^{1/2} = 1.$$

<u>Bsp</u>: $-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0$

Orthonormalsystem

$$\left\{ \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \sin k\pi t \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

2.2.09

Damit

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\int_0^1 f(s)\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin k\pi s\, ds}^{b_k}\ \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin k\pi t$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin k\pi t$$

Fourierreihe von f

5 Kommendes Semester:

Partielle Differentialgleichungen

Beispiele

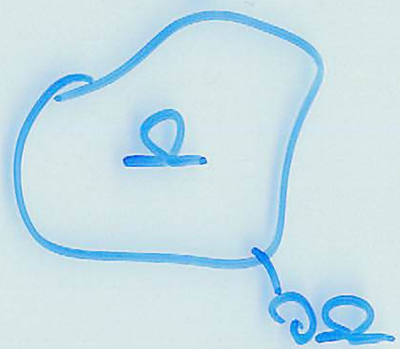
i) Wärmetransport in Medien

$$T_t(t,x) - \Delta_x T(t,x) = f(t,x)$$

$$T(0,x) = T_0(x)$$

$$T(t,x) = g(t)$$

$$x \in \partial\Omega$$



ii) Strömungen, Navier-Stokes Gleichung + RBen + AWe

$$y_t - \frac{1}{Re}\Delta_x y + (y\nabla)y + \nabla p = f$$

$$-\operatorname{div} y = 0$$

02.02.09

6

iii) Wellengleichung

$$y_{tt} - y_{xx} = f(t,x)$$

$$y(0,x) = g(x)$$

$$y_t(0,x) = h(x)$$

+ RWc