19.01.09

Randwertaufgaben

Sei $y \in C^2([a,b])$

$$D[y](t) := a_0(t)\,y''(t) + a_1(t)\,y'(t) + a_2(t)\,y(t)$$

Sei r auf $[a,b]$ stetig

Finde $y \in C^2([a,b])$ mit

$$D[y](t) = r(t) \quad \forall_t \in (a,b)$$

und

$$\underbrace{\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a)}_{R_1(y)} = \tau_1$$

$$\underbrace{\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b)}_{R_2(y)} = \tau_2$$

(1) heißt allgemeine Randwertaufgabe 2ter Ordnung (RWA)

Dabei sind $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2$ gegeben.

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t) + y_p(t)$$

RWA ist lösbar, falls C_1, C_2 bestimmt werden können, welche die Randbedingungen erfüllen.

Einsetzen ergibt

190109

$$\alpha_1 [C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + y_p(a)]$$
$$+ \beta_1 [C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a) + y_p'(a)]$$
$$= \gamma_1$$

$$\alpha_2 [C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) + y_p(b)]$$
$$+ \beta_2 [C_1 y_1'(b) + C_{12} y_2'(b) + y_p'(b)]$$
$$= \gamma_2$$

→ Bedingung an C_1, C_2 für Lösbarkeit der RWA.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \dots \\ \gamma_2 - \dots \end{bmatrix}$$

② Damit RWA lösbar, falls das GLS Lösung besitzt, eindeutig lösbar, falls

$$\begin{bmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{bmatrix}$$ invertierbar.

Bsp: $-y''(t) - y(t) = t$ in $(0,1)$

i) $y(0) = y(1) = 0$

Homogene Lösung

$$-\lambda^2 - 1 = 0$$

$\lambda_{1/2} = \pm i$

$y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) \sin t$ reelles FS

15/01/09

$y_p(t) = -t$. Damit

$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t$

$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 - 0$

$= c_1 \overset{!}{=} 0 \rightarrow c_1 = 0$

$y(1) = c_2 \sin 1 - 1 \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow c_2 = \frac{1}{\sin 1}$

$\rightarrow y(t) = \frac{1}{\sin 1} \sin t - t$.

ii) $y'(0) = 1$, $y(1) = 0$

$y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - 1$

③ Damit

$y'(0) = c_2 - 1 \overset{!}{=} 1 \rightarrow c_2 = 2$

$y(1) = c_1 \cos 1 + 2 \sin 1 - 1 \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow c_1 = \frac{1 - 2\sin 1}{\cos 1}$ Damit

$y(t) = -t + \frac{1-2\sin 1}{\cos 1} \cos t + 2 \sin t$

<u>Praxis</u> : FS und part. Lsg

i. d. R. nicht bekannt

$\Rightarrow$ numerische Lösungs-

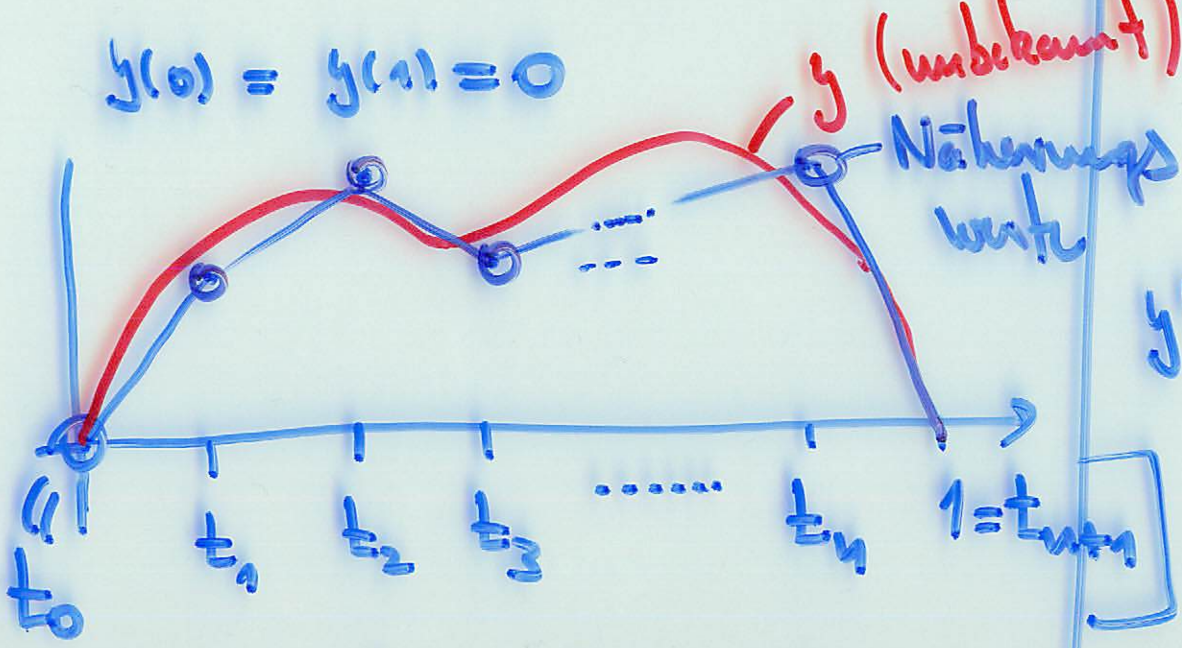
methoden

19.01.09

$$D[y](t) = a_0(t)\, y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = r(t)$$

für $t \in (0,1)$

$$y(0) = y(1) = 0$$



$$t_i := ih, \quad \underbrace{h := \frac{1}{n+1}}_{\text{Gitterweite}}$$

(4) Idee: Bestimme bei t_i Näherungswerte y_i an $y(t_i)$, indem in der DGL Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt werden

$$y'(t_i) \doteq (\approx) \frac{\overbrace{y(t_i+h)}^{y(t_{i+1})} - y(t_i)}{h}$$

$$y''(t_i) \doteq (\approx) \frac{y(t_{i-1}) - 2y(t_i) + y(t_{i+1})}{h^2}$$

Näherungen $y_i \approx y(t_i)$ werden gelöst aus

$$a_0(t_i)\frac{y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + a_1(t_i)\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + a_2(t_i)\, y_i = r(t_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Das liefert n Bedingungen für $n+2$ Unbekannte $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$. 15.01.09

Randbedingungen liefern

$$y_0 := y(0) = 0$$

$$y_{n+1} := y(1) = 0$$

Damit im Fall $i = 1$:

$$a_0(t_1)\,\frac{y_2 - 2y_1 + \overset{=0}{y_0}}{h^2} + a_1(t_1)\,\frac{y_2 - y_1}{h} + a_2(t_1)\,y_1 = f(t_1)$$

$i = n$:

$$a_0(t_n)\,\frac{\overset{=0}{y_{n+1}} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + a_1(t_n)\,\frac{\overset{=0}{y_{n+1}} - y_n}{h} + a_2(t_n)\,y_n = f(t_n)$$

(5) Insgesamt ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $y_1, \dots, y_n$

↳ selber ...

Lösbarkeit des GLS hängt ab von den Eigenschaften der Funktionen a_0, a_1, a_2 und der Gitterweite h.

(5) Ergänzung: Lineares GLS zur numerischen Lösung von $D[y] = r$, $y(0) = y(1) = 0$.

Notation: $a_0^i = a_0(t_i)$, $a_1^i = a_1(t_i)$, $a_2^i = a_2(t_i)$, $r^i = r(t_i)$

Wir erhalten mit $y(t_i) \approx y_i$ und $y_0 = 0 = y_{n+1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2a_0^1 - h a_1^1 + h^2 a_2^1 & a_0^1 & & & 0 \\ a_0^2 + h a_1^2 & -2a_0^2 - h a_1^2 + h^2 a_2^2 & a_0^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_0^{n-1} + h a_1^{n-1} & -2a_0^{n-1} - h a_1^{n-1} + h^2 a_2^{n-1} & a_0^{n-1} \\ & & & a_0^n + h a_1^n & -2a_0^n - h a_1^n + h^2 a_2^n \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{=Y} = h^2 \underbrace{\begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ r^n \end{bmatrix}}_{=R}$$

Sei $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$. Dann ist A für h klein genug invertierbar, das GLS $AY = R$ dann eindeutig lösbar.

190109

Eigenwertaufgaben für DGLen 2ter Ordnung

Sei

$$L[y] := -(p y')' + q y$$

mit $p \in C^1([a,b])$, $q \in C^0([a,b])$

Die Aufgabe: Finde $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$ mit

$$L[y](t) = \lambda\, y(t) \quad \forall_{t \in (a,b)}$$

und $y(a) = y(b) = 0$

(b) heißt homogenes Eigenwertproblem (nach Sturm-Liouville) (allgemeinere RBen möglich).

Beachte: $L[y]$ selbstadjungiert

$\leadsto$ Kap 6.13.2 Bärwolff

Bemerkung: Eigenwerte des Operators $D[y]$ sind i.d.R. komplex

Bsp: $p \equiv 1$, $q = 0$

$$-y''(t) = \lambda\, y(t) \quad \forall_{t \in (0,1)}$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

15.01.03

Char. Polynom (in μ)

$$-\mu^2 - \lambda = 0$$

$$\rightarrow \mu_{1/2} = \pm i \sqrt{\lambda}$$

$$y(t) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$$

$$y(0) = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(1) = C_2 \sin\sqrt{\lambda} \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ $C_2 = 0$ oder $\sin\sqrt{\lambda} = 0$

$$\boxed{\sqrt{\lambda_k} = k\pi}$$

(7)