060109

der Stabilität autonomer Systeme $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ Matrix

$x_0 = 0$ ist Gleichgewicht

<u>$n=2$</u> : Fundamentalsystem der DGL sei z_1, z_2

i.) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ EWe

$$\rightarrow \quad z_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1$$
$$z_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$$

mit $A v_i = \lambda_i v_i$

① Allgemeine Lösung des autonomen Systems

$$x(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

Verhalten in der Nähe von $x_0 = 0$:

$$|x(t) - x_0| = |c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2|$$
$$\leq C \underbrace{e^{\max\{\lambda_1, \lambda_2\} t}}$$
$$\rightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

falls $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Ein $\lambda_i > 0$:

$$|x(t) - x_0| \geq c_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \infty$$
$$(t \to \infty)$$

060109

i) λ doppelter EW und

$\dim \mathrm{Eig}(\lambda) = 2$

$$\Rightarrow \quad x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2$$

Damit

$$|x(t) - x_0| = c\, e^{\lambda t}$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \begin{cases} \infty & (\lambda > 0) \\ 0 & (\lambda < 0) \end{cases}$$

ii) λ doppelter EW und

$\dim \mathrm{Eig}(\lambda) = 1$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 t e^{\lambda t} v_2$$

(*) wobei v_1 EV und v_2 Hauptvektor von A ist. Damit

$$|x(t) - x_0| = (c + dt) e^{\lambda t}$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \begin{cases} \infty, & (\lambda > 0) \\ 0, & (\lambda < 0) \end{cases}$$

iv.) $\lambda = a + ib$ komplex

$\Rightarrow \bar{\lambda} = a - ib$ EW

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\bar{\lambda} t} v_2$$

$$|e^{\lambda t}| = |e^{at} e^{ibt}|$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

060109

Nichtlineare Systeme und Stabilität:

Argumentiere lokal

$$\dot{x} = F(x)$$

und x_0 Gleichgewicht, d.h. $F(x_0) = 0$. Dann (falls F differenzierbar)

$$F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{=0} + F'(x_0)(x-x_0) + R$$

Lokal $\dot{x} = F(x)$ "in etwa"

$$\dot{x} = F'(x_0)(x-x_0)$$

③ d.h. lokal haben wir

$$\dot{x} = F'(x_0)x - F'(x_0)x_0$$
$$= Ax + b$$

Lösungsmenge:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Studiere also Eigenwerte von

$$A = F'(x_0)$$

Gibt es EW λ von $F'(x_0)$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, so ist das System instabil bei x_0.

060109

Bsp: Räuber - Beute

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 - b x_1 x_2 \\ c_1 x_1 x_2 - d x_2 \end{bmatrix} = F(x)$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} d/c_1 \\ a/b \end{bmatrix}$ ist Gleichgewicht, weil

$$F(\bar{x}) = 0$$

$$F'(x) = \begin{bmatrix} a - b x_2 & -b x_1 \\ c_1 x_2 & c_1 x_1 - d \end{bmatrix}$$

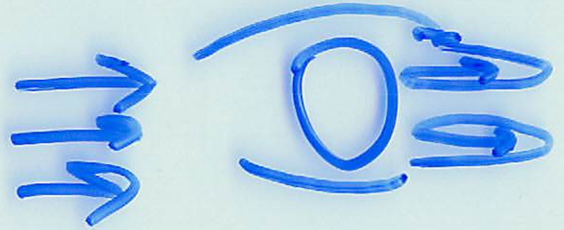
$$F'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c_1} \\ \frac{c_1 a}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

EWe von $F'(\bar{x})$: $\lambda^2 + ad = 0$

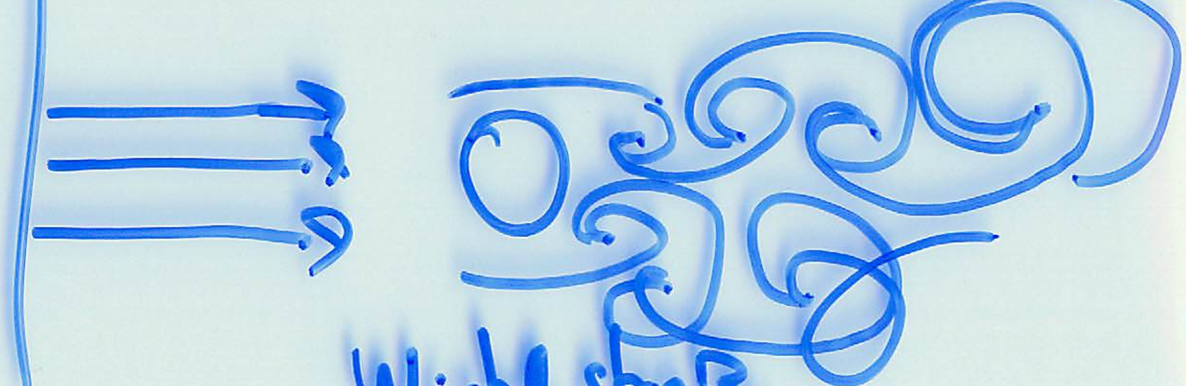
(4) $\lambda_1 = i\sqrt{ad}$ $\lambda_2 = -i\sqrt{ad}$

d.h. $\mathrm{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$

$\rightarrow$ $\bar{x}$ ist stabiles Gleichgewicht, aber nicht asymptotisch stabil.



Geschwindigkeit klein



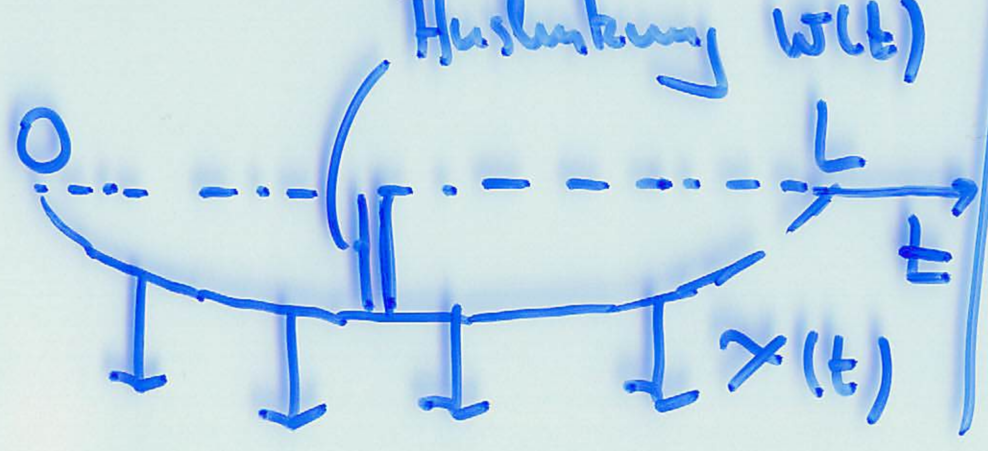
Wirbelstraße

06.01.09

Rand- und Eigenwertaufgaben

Motivation: Kabelgleichung

Zwischen 0 und L wird Kabel gespannt (ohne Eigengewicht) und mit Zugkraft $x(t)$ belastet



③ **Phänomen**: Krümmung des Kabels proportional zur Zugkraft.

$$\text{Krümmung} = \frac{w''(t)}{\sqrt{1+w'(t)^2}^{\,3}}$$

$$\approx w''(t),$$

falls Auslenkung klein.

Demnach

$$w''(t) = K\,x(t) \quad t \in (0,L)$$

$$\underbrace{w(0) = w(L) = 0}_{\text{keine Auslenkung an Enden.}}$$

06.01.09

Lösung für $L=1$ und

$x(t) \equiv f_0$ (konstant)

DGL:

$$w''(t) = f_0 \quad t \in (0,1)$$

$$w(0) = w(1) = 0$$

Lösung allgemein

$$w(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + y_p(t)$$

Char. Polynom: $\lambda^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ doppelte NS

6

$\Rightarrow y_1(t) = e^{0t} = 1$

$y_2(t) = t e^{0t} = t$

Ansatz $y_p(t) = a t^2$

$$y_p''(t) = 2a \overset{!}{=} f_0 \Rightarrow a = \frac{f_0}{2}$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 + c_2 t + \frac{f_0}{2} t^2$$

$$w(0) = 0 = c_1$$

$$w(1) = c_2 + \frac{f_0}{2} = 0$$

$$\rightarrow c_2 = -\frac{f_0}{2}$$

$$\Rightarrow w(t) = -\frac{f_0}{2} t + \frac{f_0}{2} t^2 \quad !$$