08.12.08

Bemerkungen zu DGLen n-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t)$$

homogen: $z(t) = e^{\lambda t}$

$$\rightarrow \quad z^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$$

Damit $z(t) = e^{\lambda t}$ löst homogene Gl. gdw

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0,$$

d.h. wenn

(1) λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

darstellt.

Beachte: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, wobei A Matrix des assoziierten Systems.

<u>Merke</u>:

i.) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n paarweise verschiedene Nullstellen von $P(\lambda)$, so bilden $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ FS der homogenen Gleichung.

08.12.08

ii) Zu jeder k-fachen Nullstelle λ_r sind die Funktionen

$$e^{\lambda_r t},\ t\,e^{\lambda_r t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_r t}$$

Lösungen der homogenen Gleichung.

iii) $\lambda_k = \sigma_k + i\,\vartheta_k$ komplexe Nullstelle, so sind

$$e^{\sigma_k t}\cos \vartheta_k t,\ e^{\sigma_k t}\sin \vartheta_k t$$

reelle Lösungen der homogenen Gleichung.

② Inhomogener Fall, Ansätze zur Bestimmung partikulärer Lösungen:

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t)$$

$$z(t) = z_p(t) + \underbrace{z_h(t)}_{\text{bestimmt durch EWe}}$$

Ansätze

$g(t)$	$z_p(t)$
i) $p_m(t)$ (Polynom m-ten Grades)	i) $q_m(t)$ (Polynom m-ten Grades
ii) $p_m(t)\,e^{\alpha t}$	ii) $q_m(t)\,e^{\alpha t}$

08.12.08

$g(t)$	$z_p(t)$
iii) $p_m(t)\{\sin\beta t + \cos\beta t\}$	$q_m(t)\sin\beta t + r_m(t)\cos\beta t$, r_m Polynom m-ten Grades
iv) Kombinationen von i)–iii)	Kombinationen von i)–iii)

Beachte: Ist ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen DGL (d.h. dieser Teil entspricht einem Bestandteil von g, der selber Lösung

(3) der homogenen DGL ist), so ist dieser Teil des Ansatzes solange (-häufig) mit t zu multiplizieren, bis dieser Teil des Gesamtansatzes nicht mehr Lösung der homogenen DGL ist.

Bsp: $z'' - z = 4e^t$ $g(t)$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \lambda_{1/2} = \pm 1$

$z_1(t) = e^t \;,\; z_2(t) = e^{-t}$ FS

$z_p(t) = a\,t\,e^t$, weil e^t die homogene DGL erfüllt

08.12.08

$$z_p''(t) - z_p(t)$$
$$= 2a e^t + a t e^t - a t e^t$$
$$\overset{!}{=} 4 e^t$$
$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$$\Rightarrow z(t) = z_p(t) + z_h(t)$$
$$= 2t e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

c_1, c_2 aus Anfangsbeding.

(4) Numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Aufgabe:

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dabei f bekannt („Unsere Idee" vom modellierten Prozeß), und y_0 auch.

Frage: Wie kann (P) auf den Rechner gebracht werden?

081208

<u>Idee</u>: Zurück zur Modellierung

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

mit h „klein"

Damit in (P)

$$y(t+h) - y(t) \approx h\, f(t, y(t))$$

Setze $t_k := t_0 + kh$.

Dann steht dort

$$y(t_1) - y(t_0) \approx h\, f(t_0, y(t_0))$$

$$\Rightarrow y(t_1) \approx y(t_0) + h\, f(t_0, y(t_0))$$

(3) Setze ein $y(t_0) = y_0$:

$$y(t_1) \approx \underbrace{y_0 + h\, f(t_0, y_0)}_{\text{berechenbar!}}$$

22

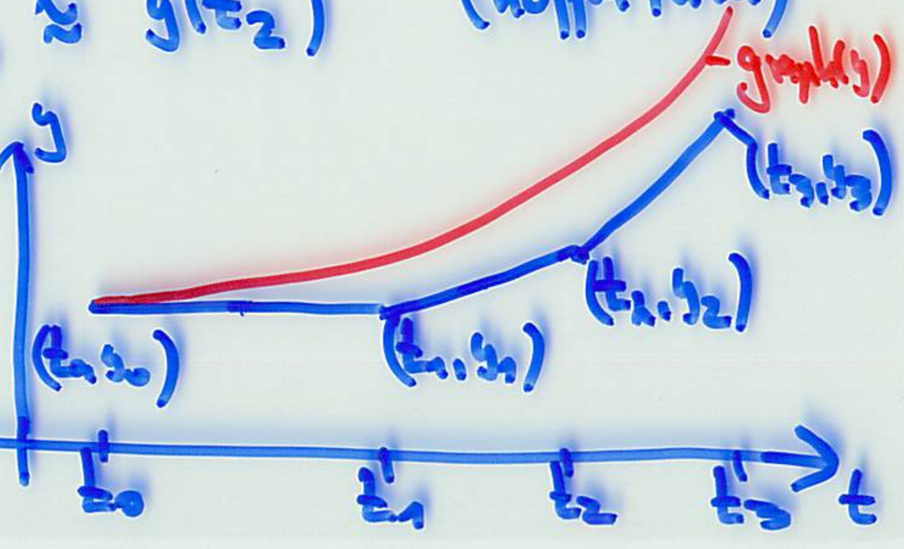
$$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$$

Analog

$$y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1)$$

$\rightsquigarrow y_2 \approx y(t_2)$ (hoffentlich)

Graphisch:



08.12.08

Polygonzug $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_k, y_k)$ approximiert (hoffentlich) graph(y).

Algorithmus: Euler-Polygonzug Methode zur num. Lösung von (P), $k := 0$

i.) $y_0 := y(t_0)$, $h > 0$

ii) α) $y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)$

β) $t_{k+1} = t_k + h$

γ) $k = k+1$ gehe zu α)

(b) Hieraus leitet sich das allgemeine Konzept eines Einschrittverfahrens zur numerischen Lösung von (P) ab.

y_0 gegeben

$y_{k+1} = y_k + h\, \phi(t_k, y_k, h)$,

wobei die Verfahrensfunktion $\phi(t, y, h)$ eine "Realisierung" unserer "Idee" f ist

Bsp.: Euler Polygonzug hat $\phi(t, y, h) = f(t, y)$ als Verfahrensfunktion

081208

Wichtige Fragen

i.) Wie "gut" ist das Verfahren, d.h. welcher Fehler ist zu erwarten, falls die exakte Lösung in das Verfahren eingesetzt wird. Hier ist im Verfahren y_k durch $y(t_k)$ und y_{k+1} durch $y(t_{k+1})$ zu ersetzen

Konsistenzfehler

ii) Wie groß ist der Fehler

$$|y_k - y(t_k)| =: e_k$$

jeweils in Termen der Schrittweite h. (Diskretisierungsfehler)

Zu i.) y_k, y_{k+1} durch $y(t_k), y(t_{k+1})$ ersetzen;

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \phi(t_k, y(t_k), h) = ?$$

Bsp: Euler Polygonzug, d.h.

$$\phi(t, y, h) = f(t, y).$$

08.11.08

8

$$\overbrace{\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k))}^{\circledast}$$

Parabelmodell für $y(t_{k+1})$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(t_k)\,h + \frac{1}{2}\, y''(t_k)\, h^2 + \frac{1}{6}\, y^{(3)}(s)\, h^3$$

mit $s \in (t_k, t_{k+1})$

Wir haben

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$$

$\rightarrow$

$$\circledast = \frac{1}{2}\, y''(t_k)\, h + \underbrace{C\, h^2}_{\text{kommt von } y^{(3)}(s)\, h^3}$$