01.12.08

DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t),$$

zunächst homogen, d.h. $g(t) = 0$.

Assoziiertes System

$$y' = A y + G(t)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) und $G(t) = [0, 0, \dots, g(t)]^t$,

$$y = [z, z', \dots, z^{(n-1)}].$$

Homogen:

$$y' = A y$$

und λ EW von A mit Vielfachheit $\sigma \geq 1$. Dann

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v_k$$

für $k = 1, \dots, \sigma$ l. u. Lösungen, wobei v_k Hauptvektoren zu λ, d.h.

$$(A - \lambda I)^{\sigma} v_k = 0 \qquad k = 1, \dots, \sigma$$

011208

Hauptvektoren berechenbar gemäß: v_1 EV,

v_2 aus $(A-\lambda I)v_2 = v_1$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^2 v_2 = (A-\lambda I)v_1 = 0$

v_3 aus $(A-\lambda I)v_3 = v_2$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^3 v_3 = 0$

$\vdots$

v_σ aus $(A-\lambda I)v_\sigma = v_{\sigma-1}$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^\sigma v_\sigma = 0$

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_\sigma$ erfüllen

$(A-\lambda I)^\sigma v_k = 0 \quad k = 1, \dots, \sigma$

① Zu v_k gibt es $y_k(t) =$

$= [z_k(t), z_k'(t), \dots, z_k^{(n-1)}(t)]^t$

Damit ergibt sich

$z_1(t) =$ erste Komponente von $y_1(t)$,

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A-\lambda I)^j v_1$$

$$= e^{\lambda t} v_1 .$$

Schreibe $v_1 = [v_1^1, \dots, v_1^n]$, so gilt

$z_1(t) = e^{\lambda t} v_1^1$

Analog mit $v_2 = [v_2^1, \dots, v_2^n]$

$\Rightarrow z_2(t) = e^{\lambda t}(v_2^1 + v_1^1 t)$

$(A-\lambda I) v_2 = v_1$

01.12.08

$\vdots$

$$z_r(t) = e^{\lambda t}\left(v_r^1 + v_{r-1}^1 t + \frac{1}{2} v_{r-2}^1 t^2 + \dots + \frac{1}{(r-1)!} v_1^1 t^{r-1} \right)$$

<u>Wichtig</u>: $v_1^1 \neq 0$, denn $v_1^1 = 0$ meint $z_1(t) \equiv 0$, also könnte z_1 nicht zu FS gehören.

$v_1^1 \neq 0$, weil aus $(A - \lambda I) v_1 = 0$

③ brauchts

$$v_1^2 = \lambda v_1^1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$v_1^n = \lambda v_1^{n-1} = \dots = \lambda^{n-1} v_1^1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} v_1^1 \\ \lambda v_1^1 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} v_1^1 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ weil}$$

v_1 EV von A, also $v_1^1 \neq 0$

Konsequenz: $z_1(t), z_2(t), \dots, z_r(t)$ sind alle l. u., bilden also ein FS, denn $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda t}$ l. u.

01.12.08

Inhomogenes System:

$$z(t) = z_p(t) + z_h(t)$$

mit

$$z_h(t) = c_1 z_1(t) + \dots + c_n z_n(t),$$

wobei $z_1, \dots, z_n$ FS zu

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = 0.$$

$z_p(t)$ = erste Komponente von

$$y_p(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} G(t)\, dt,$$

wobei

$$Y(t) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

④ Bsp $z''(t) + a z'(t) + b z(t) = g(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$ EW'e aus

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(-a-\lambda) - (-b)$$
$$= \lambda^2 + a\lambda + b \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$b \neq \frac{a^2}{4}$ $\Longrightarrow$ $z_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $z_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

Damit ergibt sich (s. VL. 24.11.)

$$z_p(t) = -z_1(t) \int \frac{z_2(t)\, g(t)}{W(t)}\, dt + z_2(t) \int \frac{z_1(t)\, g(t)}{W(t)}\, dt$$

Allgemeine Lsg: $z(t) = z_p(t) + z_h(t)$.

01.12.08

Dabei:

$z_h(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$

Beachte: $b = \frac{a^2}{4}$. Dann

λ doppelter EW, $\lambda = -\frac{a}{2}$

Dann $z_1(t) = e^{\lambda t}$, $z_2(t) = t e^{\lambda t}$

α.) $a = 5$, $b = 6$, $g(t) = t e^{-t}$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$

$z_1(t) = e^{-2t}$, $z_2(t) = e^{-3t}$

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{bmatrix} = -e^{-5t}$$

(5) $\frac{z_2(t)\,g(t)}{W(t)} = \frac{e^{-3t}\, t\, e^{-t}}{-e^{-5t}} = -t e^{t}$

$\frac{z_1(t)\,g(t)}{W(t)} = -t e^{2t}$

$$\Rightarrow \int \frac{z_2(t)\,g(t)}{W(t)}\,dt = -\int t e^{t}\,dt$$

$$= -t e^{t} + e^{t}$$

$$\int \frac{z_1(t)\,g(t)}{W(t)}\,dt = -\int t e^{2t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t}$$

$$\Rightarrow z_p(t) = e^{-2t}\{t e^{t} - e^{t}\} + e^{-3t}\{-\frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t}\}$$

$$= \frac{1}{2} t e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-t} = z_p(t).$$

01.12.08

Anfangswerte bestimmen bzg eindeutig. z.Bsp

$z(1)=1, \quad z'(1)=1$

$\Rightarrow \quad c_1 = 5, \quad c_2 = -13/4$

β) $a=0, \quad b=\omega_0^2,$

$g(t) = \sin \omega t$, d.h.

$z'' + \omega_0^2 z = \sin \omega t$

EW'e von A aus

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm \omega_0 i$

ⓑ

FS : $z_1(t) = e^{\omega_0 i t}, \quad z_2(t) = e^{-\omega_0 i t}$

$z_1(t) = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t$

$z_2(t) = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t$

Reelles FS: $z_1(t) = \cos \omega_0 t$

$z_2(t) = \sin \omega_0 t$

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \omega_0 \cos \omega_0 t \end{bmatrix}$$

$= \omega_0$

$$z_p(t) = -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \int \sin \omega_0 t \overbrace{\sin \omega t}^{g(t)} \, dt + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \int \cos \omega_0 t \sin \omega t \, dt$$

01.12.08

Es gilt

$$\int \sin\omega_0 t \,\sin\omega t \, dt = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega_0-\omega)t}{2(\omega_0-\omega)} - \dfrac{\sin(\omega_0+\omega)t}{2(\omega_0+\omega)} & \omega_0 \neq \omega \\ \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4\omega_0}\sin 2\omega_0 t & \omega_0 = \omega \end{cases}$$

$$\int \cos\omega_0 t \,\sin\omega t \, dt = \begin{cases} -\dfrac{\cos(\omega_0+\omega)t}{2(\omega_0+\omega)} - \dfrac{\cos(\omega_0-\omega)t}{2(\omega_0-\omega)} & \omega_0 \neq \omega \\ \dfrac{1}{2\omega_0}\sin^2\omega_0 t, & \omega = \omega_0 \end{cases}$$

⑦ Damit für $\omega \neq \omega_0$:

$$z(t) = z_p(t) + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \sin\omega_0 t$$

mit z_p wie oben (beschränkter)

$\hat{=}$ Schwingung mit konstanter Amplitude

$\underline{\omega = \omega_0}$: Resonanzfall

$$z(t) = -\frac{1}{2\omega_0} t \cos\omega_0 t + \text{Schwingung beschränkter Amplitude}$$