24/1/08

Differentialgleichungen n-ter Ordnung (lineare!)

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)\, z^{(n-1)} + \dots + \dots + a_1(t)\, z' + a_0(t)\, z = g(t)$$

heißt lineare DGL n-ter Ordnung für die Funktion $z = z(t)$.
Dabei ist $g(t)$ gegeben.

① Anfangsbedingungen

$z(t_0) = z_0$, $z'(t_0) = z_0'$, $\dots$, $\dots$, $z^{(n-1)}(t_0) = z_0^{n-1}$

mit $z_0, z_0', z_0'', \dots, z_0^{n-1}$ gegeben

Es gilt folgende fundamentale Relation:

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, z^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\, z(t) = g(t)$$

gdw

$$y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

24.11.08

mit

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

und $y_1(t) := z(t)$, $y_2(t) = z'(t)$,

$y_3(t) = z''(t), \dots, y_n(t) = z^{(n-1)}(t)$.

Begr.: $A(t)\,y(t) =$

$$= A(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Letzte Zeile $-a_0(t)\,z(t) - a_1(t)\,z'(t) - \dots - a_{n-1}(t)\,z^{(n-1)}(t)$

②

$= y_n'(t) - g(t)$

$= z^{(n-1)}(t)' - g(t)$

$= z^{(n)}(t) - g(t)$,

d.h. z erfüllt linear DGL n-ter Ordnung

Idee: Leite Eigenschaften von Lösungen z der DGL n-ter Ordnung her aus Eigenschaften der Lösung $y(t)$ des assoziierten DGL-Systems erster Ordnung

241108

Fundamentalsystem einer DGL n-ter Ordnung

Seien $z_1, z_2, \dots, z_n$ Lösungen der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung, d.h.

$$z_i^{(n)} + a_{n-1}(t)\, z_i^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, z_i = 0$$

für $i = 1, 2, \dots, n$

Sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ linear unabhängig, d.h. folgt aus

$$\alpha_1 z_1(t) + \dots + \alpha_n z_n(t) = 0 \quad \forall_t$$

dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$,

③ so heißt $z_1, z_2, \dots, z_n$ Fundamentalsystem (FS) der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung

Folgerung: Ist $z_1, \dots, z_n$ FS der DGL n-ter Ordnung, so ist

$$y_i(t) := \begin{bmatrix} z_i(t) \\ z_i'(t) \\ \vdots \\ z_i^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

ein FS für das homogene System

$$y'(t) = A(t)\, y(t),$$

wobei $A(t)$ wie oben gegeben ist.

241108

Nachweis: Betrachte

$$Y(t) = [y_1(t), y_2(t) \dots y_n(t)]$$

Gilt

$$Y(t)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

so ist $Y(t)$ regulär, ergo

$$W(t) = \det Y(t) \neq 0 \quad \forall t$$

Wir haben:

Gute Zeile $(Y(t)) \cdot \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$

$$= \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t) + \dots + \alpha_n z_n(t)$$

(4) $= 0 \rightarrow$ Beh. ∎

$$b(t) := \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ g(t)\end{bmatrix}$$

Betrachte

$$y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t) \quad (*)$$

Lösungsmenge

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

mit

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t),$$

$y_1(t), \dots, y_n(t)$ FS von DGL-System

$(*)$ und $y_p(t)$ partikuläre Lösung

24.11.08

Dabei

$$y_p(t) = Y(t)\int Y^{-1}(t)G(t)\,dt$$

D.h. für die allgem. Lösung der DGL n-ter Ordnung:

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t),$$

wobei $z_h(t)$ bzw $z_p(t)$ die erste Komponente von $y_h(t)$ bzw $y_p(t)$ darstellen.

5 **Bsp**: $n=2$

$$z''(t) + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = g(t)$$

Forme System

$$y'(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}'$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}}_{=:A(t)} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}}_{=:G(t)}$$

Sei $z_1(t)$, $z_2(t)$ FS der DGL 2ter Ordnung. Dann

$$Y(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{bmatrix}$$

und

$$Y(t)^{-1} = \frac{1}{\det Y(t)} \begin{bmatrix} z_2'(t) & -z_2(t) \\ -z_1'(t) & z_1(t) \end{bmatrix},$$

also

$$Y(t)^{-1} G(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{bmatrix} -z_2(t)\, g(t) \\ z_1(t)\, g(t) \end{bmatrix}$$

Damit y_p des Systems

$$y_p(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{bmatrix} \int Y(t)^{-1} G(t)\, dt$$

$$= \begin{bmatrix} -z_1(t) \int \frac{z_2(t) g(t)}{W(t)} dt + z_2(t) \int \frac{z_1(t) g(t)}{W(t)} dt \\ -z_1'(t) \int \frac{z_2(t) g(t)}{W(t)} dt + z_2'(t) \int \frac{z_1(t) g(t)}{W(t)} dt \end{bmatrix}$$

⑥ Also partikuläre Lösung der DGL 2-ter Ordnung

$$z_p(t) = -z_1(t) \int \frac{z_2(t) g(t)}{W(t)} dt + z_2(t) \int \frac{z_1(t) g(t)}{W(t)} dt$$

Allgemeine Lösung:

$$z(t) = z_p(t) + C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t).$$

Bsp. konkret:

$$z'' + \frac{1}{t} z' - \frac{4}{t^2} z = 2t^4 \quad (t > 0)$$

$z_1(t) = t^2$ ist Lösung der homogenen Gleichung

Konstruiere zweite Fundamentallösung $z_2(t)$:

24.11.08

Hilfsmittel Reduktions-methode (↝ Selbststudium)

Ansatz: $z_2 = v\, z_1$ in DGL

$$v'' z_1 + 2 v' z_1' + \frac{1}{t} v' z_1 = 0$$

$$\leadsto \frac{v''}{v'} = \frac{2 z_1' + \frac{1}{t} z_1}{z_1} = -\frac{5}{t}$$

Subst.: $w = v'$. Damit

$$\int \frac{w'}{w}\, dt = \int -\frac{5}{t}\, dt$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 t^{-5}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{c_1}{4} t^{-4} + c^*$$

(7)

$$\Rightarrow z_2(t) = c^* t^2 - \frac{c_1}{4} t^{-2}$$

$$c^* = 0,\quad c_1 = -4 \quad = t^{-2}$$

Damit $W(t) = \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{bmatrix}$

$$= \det \begin{bmatrix} t^2 & t^{-2} \\ 2t & -2t^{-3} \end{bmatrix} = -\frac{4}{t} \neq 0 \quad \forall t > 0$$

Homogen Lösung

$$z_h(t) = c_1 t^2 + \frac{c_2}{t^2}$$

$z_p(t) = \ldots$ Lösungsformel ..

$$= \frac{1}{16} t^6$$

24.11.08

Allg. Lösung

$z(t) = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t^2} + \frac{1}{16} t^6$

Anfangsbedingungen bestimmen

C_1 und C_2, denn

$z(1) = 1$, $z'(1) = 0$

ergibt

$C_1 + C_2 + \frac{1}{16} = 1$

$2C_1 - 2C_2 + \frac{3}{8} = 0$

$\rightarrow C_1 = \frac{3}{8}$, $C_2 = \cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{9}{16}$

⑧ Spezialfall konstante Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, homogene DGL n-ter Ordnung

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 z' + a_0 z = 0$$

assoziiertes System:

$$\begin{bmatrix} z \\ z' \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} z \\ z' \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Sei λ EW von A mit Vielfachheit $r \geq 1$ und

24.11.08

9

$v_1, \dots, v_k, \dots, v_\sigma$ seien

Hauptvektoren zu λ

Dann bilden für $k = 1, \dots, \sigma$

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v_k$$

den zu λ gehörigen Anteil

des FS von $y' = Ay$