17.11.08

Normal $y' = A y$ mit konstanter Matrix A $(n \times n)$

$\exists$ v EV von A zu λ

$\Rightarrow$ $y(t) := e^{\lambda t} v$

Lösung von $y'(t) = A\, y(t)$

<u>Problematisch</u>: A nicht diagonalisierbar.

<u>Bsp</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ doppelter EW,

d.h. $r_1 = 2$ und $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ EV

(1) $\mathrm{Eig}(\lambda = 3) = \mathrm{span}\{v_1\}$,

d.h. $\dim \mathrm{Eig}(\lambda=3) = 1 < 2 = r_1$

$y_1(t) = e^{3t} v_1$ Lösung von

$y'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} y(t)$

<u>Beh.</u>: Es gibt keine weitere, l.u. Lösung der Form $e^{\alpha t} v_1$,

denn $Y(t) = \left[e^{3t} v_1 \;\; e^{\alpha t} v_1 \right]$ (2×2)

besitzt $\det Y(t) = 0$, weil $e^{3t} v_1$ und $e^{\alpha t} v_1$ l.u.,

d.h. $e^{3t} v_1 = y_1$ und $e^{\alpha t} v_1$ bilden kein FS

17.11.08

Frage: Wie können wir weitere, von y_1 l. u. Lösung konstruieren?

<u>Ansatz</u>: $h(t) = e^{\lambda t} v + t e^{\lambda t} w$

mit $v, w \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = 3$

Einsetzen in DGL

$$h'(t) = 3 e^{3t} v + e^{3t} w + 3t e^{3t} w$$

$$= 3t e^{3t} w + e^{3t}(w + 3v)$$

$$\overset{DGL}{=} A h(t) = e^{3t} A v + t e^{3t} A w$$

$$\Rightarrow 0 = t e^{3t} (A - 3I) w + e^{3t} [(A - 3I) v - w]$$

für alle $t \in \mathbb{R}$

(2) $\lambda = 3$ EW!

$$\Rightarrow (A - 3I) w = 0$$

und $(A - 3I) v = w$

Wähle $w := v_1$ $\quad (A v_1 = 3 v_1)$

Dann $(A - 3I) w = 0$

Wähle v als ersten Hauptvektor von A zum EW $\lambda = 3$,

d.h. $(A - 3I) v = w$

$$\Rightarrow (A - 3I)^2 v = (A - 3I) w = 0$$

17.11.08

Matrix Exponentialfunktion

Motivation: $y' = ay$, $y(0) = y_0$

$\Rightarrow$ $y(t) = y_0 e^{at}$ im skalaren Fall, d.h. $n = 1$

System $n \geq 2$: $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann "sollte"

$$y(t) = e^{At} y_0$$

gelten.

Frage: Wie kann e^{At} in diesem Kontext 'vernünftig' erklärt werden?

③ Formal

$$e^{At} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j}_{\text{Matrix Potenzen}},$$

denn für $z \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ist

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

Setze "$z = At$"

$$A^j = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{j\text{-mal}}$$

Damit $e^{At} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ($n \times n$ Matrix)

mit

$$\|e^{At}\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!} \|A\|^j = e^{|t|\|A\|}$$

$\rightarrow$ Def von e^{At} sinnvoll.

17.11.08

Wir erhalten

$$(e^{At})' = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A^j$$

$$= A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = A e^{At}$$

Damit löst

$$y(t) := e^{At} y_0$$

die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

denn

$$y'(t) = (e^{At} y_0)' = A e^{At} y_0$$

$$= A\, y(t) \quad \checkmark$$

und

$$y(0) = e^{A \cdot 0} y_0 = I y_0 = y_0 \quad \checkmark$$

④ Sei v EV zum EW λ.

Dann gilt

$$e^{At} v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j v$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \lambda^j v = e^{\lambda t} v.$$

Damit ergibt $e^{At} v$ Fundamentallösung $y(t) = e^{\lambda t} v$.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dann

$$e^{At} v = e^{\lambda I t + (A - \lambda I) t} v$$

$$= e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I) t} v$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v$$

17.11.08

Sei v Hauptvektor zu λ, d.h.

$(A-\lambda I)^{\sigma} v = 0$. Dann

$$e^{At} v = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A-\lambda I)^j v$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A-\lambda I)^j v$$

entspricht der Hauptvektorlösung!

Bsp: $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} y$, $y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Potenzen von A:

$A^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) mit $A^{k+4} = A^k$ $k \geq 1$.

Damit Lösung

$$y(t) = e^{At} y_0$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \dots & t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - + \dots \\ -t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^5}{120} + - \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \end{bmatrix}}_{e^{At}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{y_0}$$

$$= \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - + \dots \\ 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Klassischer Lösungsweg:

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow$

$\lambda_{1/2} = \pm i$ EWe

$v^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ $v^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ EV'en

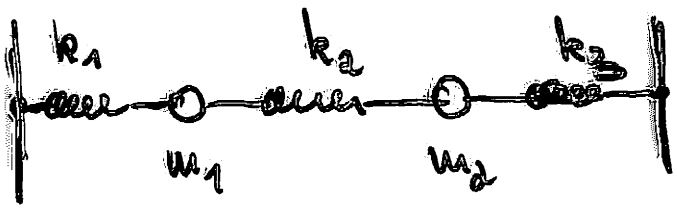
Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $y(t) = c_1 e^{-it} v^1 + c_2 e^{it} v^2$

$$y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = -\frac{1}{2} i$$

mit $e^{it} = \cos t + i \sin t$

ergibt sich $y(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$.

Bsp



m_1, m_2 Massen, k_1, k_2, k_3 Feder-Konstanten, $x_1(t)$ Auslenkung von m_1, $x_2(t)$ dito von m_2

(b) Kraftbilanzen ergeben

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2$$

in Matrix-Form

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_3+k_2}{m_2} \end{bmatrix} X$$

Erzeuge DGL-System erster Ordnung

$$y_1 = x_1 \qquad y_3 = x_2$$
$$y_2 = \dot{x}_1 \qquad y_4 = \dot{x}_2 \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 \end{bmatrix} y =: A y$$

17.11.08

Setze $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $k = 1$, $k_2 = k_3 = 2$. Damit

$$y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{= A} y$$

<u>EW'e</u> $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i \qquad \lambda_{3/4} = \pm 2i$

EV'en: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} 2i \\ -4 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2i \\ -4 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$

(+) Linear unabhängige Lösungen

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2$

$y_3(t) = e^{\lambda_3 t} v_3 \qquad y_4(t) = e^{\lambda_4 t} v_4$

Reelle Lösungen sind gegeben durch

$y_{11} = \mathrm{Re}\, y_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2$

$y_{12} = \mathrm{Im}\, y_1 = \frac{1}{2i} y_1 - \frac{1}{2i} y_2$

mit y_3 und y_4 analog, denn

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \overline{z}$

$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i} z - \frac{1}{2i} \overline{z}$