211008

Logistisches Wachstum

$$\lambda P(t)\,(K - P(t))$$

$$P'(t) = \lambda K P(t) - \lambda P^2(t)$$

$$P(t_0) = P_0$$

Es gilt

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda K (t - t_0)}}$$

Wie sehen wir das ein?

Substitution $z(t) = \frac{1}{P(t)}$

$$z'(t) = -\frac{P'(t)}{P^2(t)} = \lambda - \lambda K \frac{1}{P(t)}$$

①

$$\rightarrow \quad z'(t) = \underbrace{\lambda}_{\beta} - \underbrace{\lambda K}_{\alpha} z(t)$$

$$= -\alpha\, z(t) + \beta$$

Bsp 1 mit $\alpha = \lambda K$, $\beta = \lambda$, $\beta/\alpha = \frac{1}{K}$

$$\Longrightarrow$$

$$z(t) = \frac{1}{K} + \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-K\lambda (t - t_0)}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{P(t)}$$

$\rightarrow \quad P(t) = $ s. l.

Lösungsdarstellung erlaubt Diskussion des Populationsverlaufs

21.10.08

Einige Begriffe

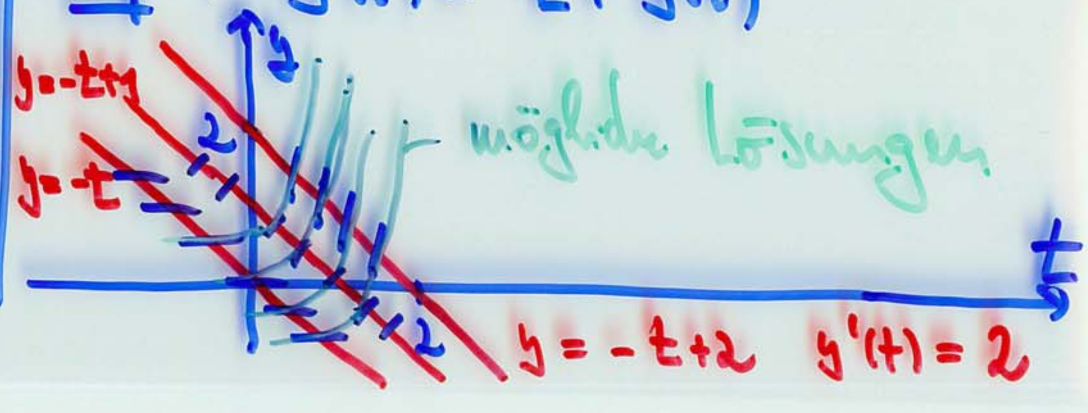
i) $$y'(t) = f(t, y(t))$$
heißt explizite Differentialgleichung erster Ordnung

ii) Finde einen Wert $T$ und eine Funktion
$$y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall\, t \in (t_0, T]$$
$$y(t_0) = y_0$$
heißt Anfangswertproblem (AWP)

② zu gegebenem $y_0$ (Anfangswert) und $f$ („Idee" des Prozesses)

iii) $(t, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ein kurzes Geradenstück durch diesen Punkt mit Steigung $f(t, y)$ heißt <u>Linienelement</u>, die Gesamtheit dieser Elemente heißt Richtungsfeld der DGL.

<u>Bsp</u>: $y'(t) = t + y(t)$



21.1.008

Differentialgleichungstypen

i.) lineare DGL erster Ordnung

$$y'(t) = \alpha(t)\,y(t) + s(t)$$

d.h. $f(t,y) = \alpha(t)\,y + s(t)$

DGL heißt homogen, falls $s(t) = 0$, inhomogen, sonst.

i.) a) homogener Fall

$$y'(t) = \alpha(t)\,y(t)$$

$$\rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int \alpha(t)\,dt$$

③

$$\xrightarrow[z = y(t),\ dz = y'(t)\,dt]{\text{Subst}} \int \frac{1}{z}\,dz = \int \alpha(t)\,dt$$

$$\rightarrow \ln|z| = \int \alpha(t)\,dt + c_1$$

$$\rightarrow y(t) = \underbrace{e^{c_1}}_{=:\,c_0 > 0} e^{\int \alpha(t)\,dt}$$

Damit

$$\boxed{y(t) = c_0\, e^{\int \alpha(t)\,dt}}$$

allgemeine homogene Lösung

i.) b) inhomogener Fall

Lösung mit Hilfe der

Variation der Konstanten

211008

Ansatz für die Lösung

$$y(t) = C(t)\, e^{\int \alpha(t)\, dt}$$

Damit, Produktregel

$$y'(t) = C'(t)\, e^{\int \alpha(t)\, dt} \cancel{+ C(t)\,\alpha(t)\, e^{\int \alpha(t)\, dt}}$$

$\alpha(t)$

$$= dt\; y(t) + s(t)$$

$$= \cancel{\alpha(t)\, C(t)\, e^{\int \alpha(t)\, dt}} + s(t)$$

$$\rightarrow \quad s(t) = C'(t)\, e^{\int \alpha(t)\, dt}$$

$$\rightarrow \quad C'(t) = e^{-\int \alpha(t)\, dt}\, s(t)$$

$$\rightarrow \quad C(t) = \int s(t)\, e^{-\int \alpha(t)\, dt}\, dt + C_1$$

(4) Damit

$$y(t) = e^{\int \alpha(t)\, dt} \left\{ C_1 + \int s(t)\, e^{-\int \alpha(t)\, dt}\, dt \right\}$$

$$= \underbrace{C_1\, e^{\int \alpha(t)\, dt}}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{e^{\int \alpha(t)\, dt} \int s(t)\, e^{-\int \alpha(t)\, dt}\, dt}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

211008

Mit Anfangswerten $y(t_0) = y_0$:

Homogene Lösung

$$y_h(t) = y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi}$$

Partikuläre Lösung

$$y_p(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi} \cdot \int_{t_0}^{t} s(s)\, e^{-\int_{t_0}^{s} \alpha(\tau)\, d\tau}\, ds$$

Bsp: $y'(t) = -\alpha\, y(t) + \beta$

$y(0) = y_0$,

d.h. $t_0 = 0$, $\alpha$, $\beta$ konstant

5 Damit

$$y(t) = e^{-\int_0^t \alpha\, ds} \left\{ y_0 + \int_0^t \beta\, e^{\int_0^s \alpha\, d\tau}\, ds \right\}$$

$$= e^{-\alpha t} \left\{ y_0 + \int_0^t \beta\, e^{\alpha s}\, ds \right\}$$

$$= e^{-\alpha t} \left\{ y_0 + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha \cdot 0} \right\}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} + \left\{ y_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right\} e^{-\alpha t}$$

$\equiv$ Lösung Bsp 1 Glukose.

Bsp: $y'(t) = \alpha(t)\, y(t) + s(t)\, y(t)^{\varrho}$

mit $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Bernoulli DGL

211008

<u>Beachte</u>: $\rho=0$ inhomogen linear

$\rho=1$ homogen linear

Substitution $z(t)=y(t)^{1-\rho}$

$$z'(t) = (1-\rho)\, y'(t)\, y(t)^{-\rho}$$

$$\overset{\text{DGL}}{\underset{\text{für } y}{=}} (1-\rho)\, \alpha(t)\, y(t)^{1-\rho} + (1-\rho)\, s(t)$$

$$= \underbrace{(1-\rho)\,\alpha(t)}_{=:\tilde{\alpha}(t)}\, z(t) + \underbrace{(1-\rho)\, s(t)}_{=:\tilde{s}(t)}$$

$$\rightarrow z'(t) = \tilde{\alpha}(t)\, z(t) + \tilde{s}(t)$$

① Das ist inhomogene DGL, linear, für $z$ → Lösungsformel

Rücksubstitution liefert $y(t)$.

z.B. logistisches Wachstum

$\rho=2$, $\alpha(t) = K\lambda$, $s(t)=-\lambda$

mit $y(t_0) = P_0$ liefert

$$y(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K}{P_0}-1\right) e^{-\lambda K (t-t_0)}}$$

<u>Bsp</u>: $y'(t) = \left(\frac{1}{t}-t\right) y(t) - \frac{t}{y(t)} e^{-t^2}$

hier $\alpha(t) = \frac{1}{t} - t$, $s(t) = -t e^{-t^2}$, $\rho=-1$

$$\rightarrow y(t) = \sqrt{e - 2\ln t}\; t\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$