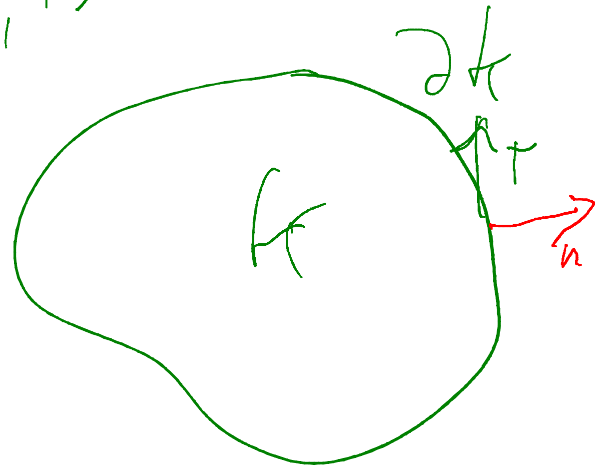
Green 2d

$$\int_K \operatorname{rot} f \, dx = \oint_{\partial K} f \, dx = \oint_{\partial K} \langle f, T \rangle \, ds$$



Gauß 2d

$$\int_K \operatorname{div} f \, dx = \oint_{\partial K} \langle f, n \rangle \, ds$$

Einheitsnormalenvektor

3.3 Oberflächenintegrale

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung

$p = \begin{pmatrix} p_1(u_1,u_2) \\ p_2(u_1,u_2) \\ p_3(u_1,u_2) \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$c = c(t) \quad t \in D \subseteq \mathbb{R}$

$\frac{\partial}{\partial t} c(t) = \dot{c}$

$c = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D\}$$

eine Fläche bzw. ein Flächenstück. Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nannt man dann eine Parametrisierung oder Parameterdarstellung der Fläche F.

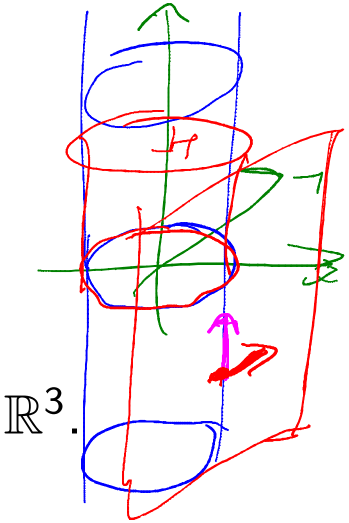
Beispiel I.

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

r fest

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2.$$

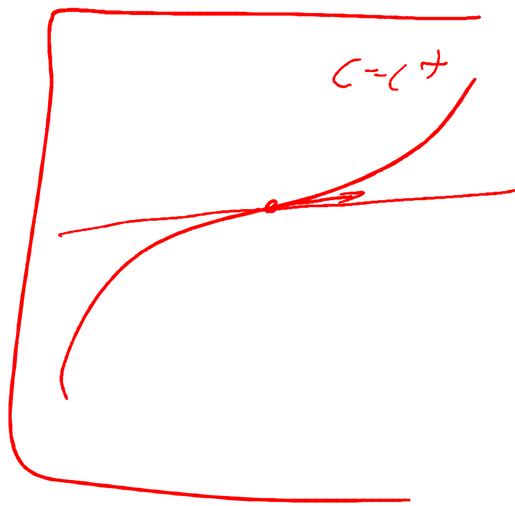
$\in (0, 2\pi] \times \mathbb{R}$



Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$\boxed{(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2}$$



so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H.

Die partiellen Ableitungen

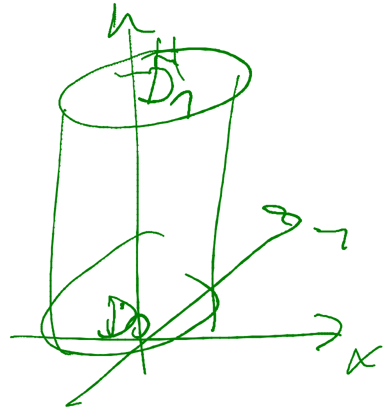
$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbf{p}(\varphi, z)$ sind linear unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

$$p_0(s,\varphi) = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{z = 0 \text{ fest}}$

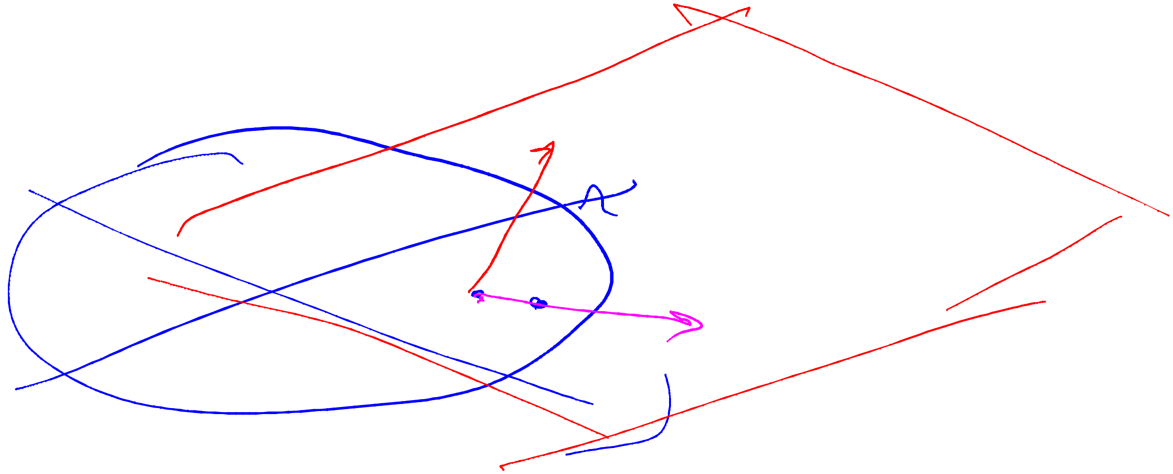
$\boxed{(s,\varphi) \in (0,R] \times (0,2\pi]}$



$$p_1(s,\varphi) = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$z = H$ fest

$$\frac{\partial p_0}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -s\sin\varphi \\ s\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial p}{\partial \varphi} \times \frac{\partial p}{\partial s} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \right\| = s$$

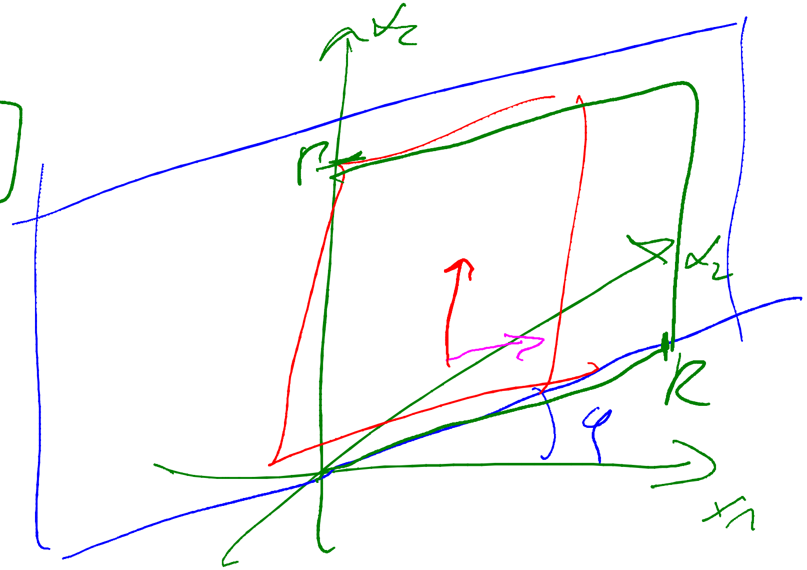
$$O = \int_D do = \int_0^{2\pi}\int_0^R s\,ds\,d\varphi = 2\pi \frac{R^2}{2} = R^2\pi$$

$$p(r,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{\varphi \text{ fest}}$

$$(r,z) \in [0,R] \times [0,Z]$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\left\| \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial z} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

$$O = \int_D dO = \int_0^R \int_0^Z 1 \cdot dr\, dz = RZ$$

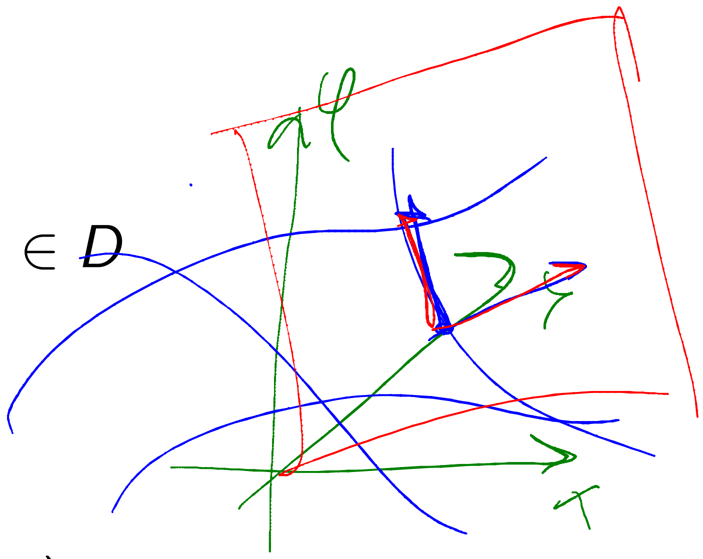
Beispiel II.

Spezialfall:

Der Graph einer skalaren $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \mathbf{u} \in D$$

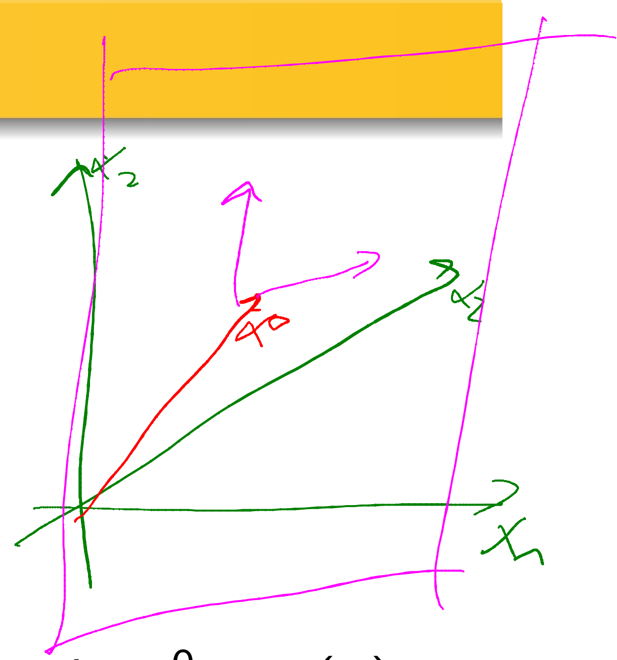


Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.

Die Tangentialebene einer Fläche.



Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen tangential an die Fläche F.

Sie spannen die Tangentialebene $\boxed{T_{\mathbf{x}^0}F}$ der Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

variabel

$$\boxed{T_{\mathbf{x}^0}F \;:\; \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)} \qquad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Frage: Wie kann man den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

Das Oberflächenintegral eines Flächenstückes.

$ds = \|\dot{c}(t)\|\,dt$

Definition: Sei $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend. Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das Oberflächenintegral

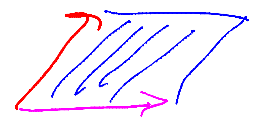
$L = \int_c ds = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,dt$

$$\int_{\mathbf{p}(K)} do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| \, d\mathbf{u}$$

$\int \quad du \stackrel{\wedge}{=} \Sigma$

Dabei nennt man den Term

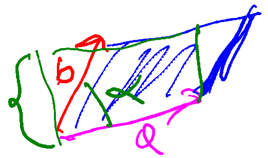
$$\underbrace{do := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| \, d\mathbf{u}}$$



das Oberflächenelement der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$.

Bemerkung: Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationssatz.

$\|b\| \sin\alpha$



$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\alpha$

Beispiel.

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man mit

$$\underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\|} = r = \left\| \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = R$$

den Wert

$$\boxed{O(Z)} = \int_Z do = \int_K r d(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dz d\varphi = 2\pi r H$$

Beispiel.

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

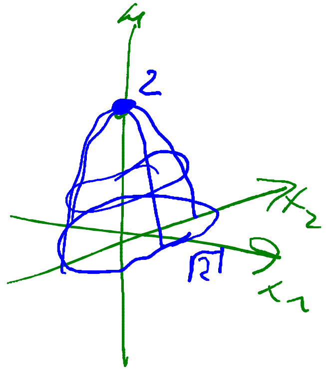
$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

und

$$\begin{aligned} O(\mathbf{p}(K)) &= \int_{\mathbf{p}(K)} do \\ &= \int_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}\, d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Beispiel.

Für die Oberfläche des Paraboloids P, gegeben durch



$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\},$$

$x_3 = \varphi(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$ $\quad \varphi_{x_1} = -2x_1 \quad \varphi_{x_2} = -2x_2$

gilt

$\varphi_{x_1}^2 \quad \varphi_{x_2}^2$

$$O(P) = \int_{x_1^2+x_2^2\leq 2} \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}\, d(x_1, x_2)$$

Polarkoordinaten

$\rho^2 = s$

$2\rho d\rho = ds$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, d\varphi\, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s}\, ds$$

$$= \pi \left[\frac{1}{6}(1 + 4s)^{3/2}\right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{6}(27 - 1)\right) = \frac{13}{3}\pi$$

Bemerkung.

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

$$= \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \cos^2\theta = \|a\|^2\|b\|^2(1-\cos^2\theta) = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2$$

Definiert man

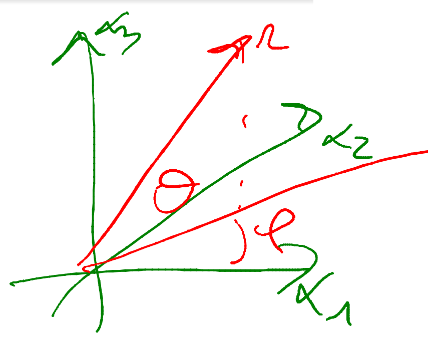
$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \rangle, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2)$$

Beispiel.

Für das Oberflächenelement der Sphäre $\qquad r$ fest



$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$p(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi,\theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\left\|\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right\|^2 = E = r^2\cos^2\theta, \qquad \left\langle \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\rangle = F = 0, \qquad G = r^2 = \left\|\frac{\partial p}{\partial \theta}\right\|^2$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit

$$E = r^2 \cos^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

folgt aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2) = \sqrt{r^4 \cos^2 \theta}\, du_1 du_2$$

$$= r^2 \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

daher

$$do = r^2 \cos\theta\, d(\varphi, \theta) \qquad \text{für } (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wir können nun die Oberfläche der Sphäre wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{4\pi r^2} \end{aligned}$$

Oberflächenintegrale erster und zweiter Art.

Definition: Sei $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine $\mathcal{C}^1$–Parametrisierung einer Fläche $F = \mathbf{p}(K)$, wobei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend ist.

- Für eine stetige Funktion $f : F \to \mathbb{R}$ ist das Oberflächenintegral 1. Art definiert durch

$$\boxed{\int f\,ds = \int f(c(t))\|\dot c(t)\|\,dt}$$

$$\int_F f(\mathbf{x})\,do := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u}))\,\underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}}_{do}$$

- Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : F \to \mathbb{R}^3$ ist das Oberflächenintegral 2. Art definiert durch

$$\int \left\langle f(c(t)), \begin{pmatrix} -\dot c_2(t) \\ \dot c_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_C \langle f, [illegible]\rangle\,ds$$

$$n = \frac{N}{\|N\|}$$

Normalvektor auf Kurve in $\mathbb{R}^2$

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\,do := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u}$$

Alternative Darstellung für Oberflächenintegrale.

Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

$\int \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt = \int \langle f(c(t)), T(t) \rangle \|\dot{c}\| dt$ $\qquad T = \dfrac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned}
\boxed{\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do} &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u} \\
&= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u} \\
&= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle\, do
\end{aligned}$$

Vektorfeld

Stokes

Bemerkung:

- Ist $f(\mathbf{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Integral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.

- Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Integral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den Fluss von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch die Fläche F.

- Ist F eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberflächen eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir

$$\oint_F f(\mathbf{x})\, do \qquad \text{bzw.} \qquad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do$$

  Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nach außen weist.

Der Integralsatz von Gauß.

Satz: (Integralsatz von Gauß) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h. G sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.
Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld mit $G \subset D$, so gilt

$$\boxed{\int_G \operatorname{div} f \, dx = \oint_{\partial G} (f, n) \, ds \quad \boxed{2D}}$$

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, do$$

Interpretation des Gaußschen Integralsatzes: Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung, so gilt $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ und daher

$$\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, do = 0$$

$\operatorname{div} f = 0$

$$\Longrightarrow \oint_{\partial G} f \, do = 0$$

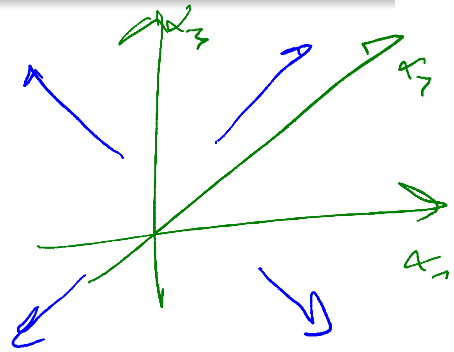
$$\oint_{\partial G} f \, do = 0 \quad \not\Longrightarrow \operatorname{div} f = 0$$

falls $\operatorname{div} f(x) \geq 0$ für ein x

$$\Longrightarrow \exists\, y \quad \operatorname{div} f(y) < 0$$

Beispiel.

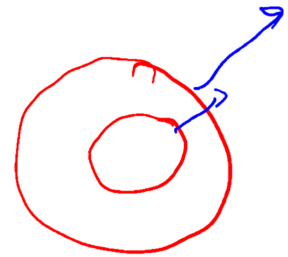
Wir betrachten das Vektorfeld



$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

und die Kugel K:

$$K := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \underline{1}\}$$



Dann gilt offensichtlich

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3}$$

Gauß

und damit

$$\oint_{\partial K} f\, d\sigma = \boxed{\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}} = 3 \cdot \overbrace{\operatorname{vol}(K)}^{\frac{4}{3}\pi} = 4\pi$$

Das entsprechende Oberflächenintegral läßt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. durch die Parametrisierung der Kugel mit Kugelkoordinaten, berechnen.

$$\oint_{\partial K} f \, do = \int \left\langle f, \frac{\partial p}{\partial \varphi} \times \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\rangle du =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \right\rangle}_{\|x\| \underset{R=1}{=} 1} R^2 \cos\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 1^2 \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = O(K) = 4\pi$$

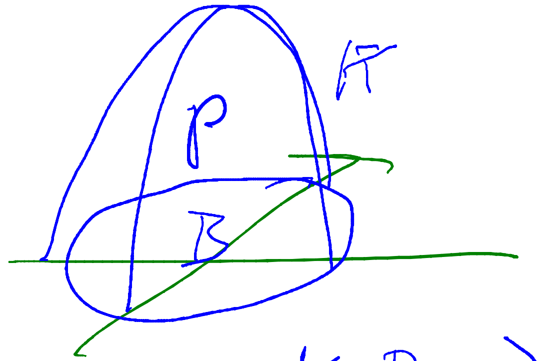
f Wärmefluss

Frage: Wärmefluss durch Kuppel?

$$\int_K \langle f, n \rangle \, d\sigma = \int_P \operatorname{div} f \, dx - \int_B \langle f, n \rangle \, d\sigma$$

nicht bekannt

einfach zu berechnen



$K \cap B = \partial P$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Formeln von Green.

Satz: (Formeln von Green) Die Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für $\mathcal{C}^2$–Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

$$\int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do$$

$$\int_G (g\Delta f + \langle \nabla g, \nabla f \rangle)\, dx = \oint g \frac{\partial f}{\partial n}\, do$$

$$\int_G (f\Delta g - g\Delta f)\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) do$$

Hierbei bezeichnet

$$\langle \nabla f, n \rangle = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}) \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis der Greenschen Formeln.

Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

Gauß

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\, do \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle\, do = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do \end{aligned}$$

$\langle F, n \rangle = \langle f \nabla g, n \rangle = f \langle \nabla g, n \rangle$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g.