Projizierbare Mengen.

Definition: Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt projizierbar in Richtung x_i, $i \in \{1, \ldots .n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen φ, ψ gibt, so dass

$$D = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in B \text{ und } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}}) \}$$

Bemerkung:

- Projizierbare Mengen sind stets messbar. Damit sind auch alle Normalbereiche messbar, denn Normalbereiche sind projizierbar.
- Häufig läßt sich der Integrationsbereich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Bereich sind dann ebenfalls messbar.

Integration über Normalbereiche und projizierbare Mengen.

Satz: Ist $f(\mathbf{x})$ auf einem Normalbereich

nicht projezierbar in x Richtung

projezierbar in y Richtung

$$D = \{ \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x) \, \}$$

eine stetige Funktion, so gilt

$$\boxed{\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \int_a^b \overbrace{\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy}^{F(x)} \, dx$$

Analoge Beziehungen gelten für höhere Dimensionen: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine projizierbare Menge in Richtung x_i, d.h. D besitzt eine Darstellung der Form

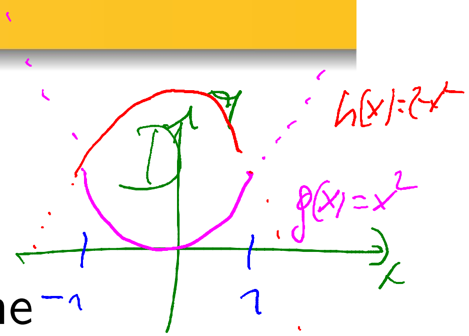
$$D = \{ \, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\mathbf{x}} \;=\; (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in B$$

$$\text{und } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}}) \, \}$$

so gilt

$$\boxed{\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \int_B \overbrace{\left(\int_{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})}^{\psi(\tilde{\mathbf{x}})} f(\mathbf{x})dx_i \right)}^{F(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)} d\tilde{\mathbf{x}}$$

Beispiel.



Gegeben sei die Funktion

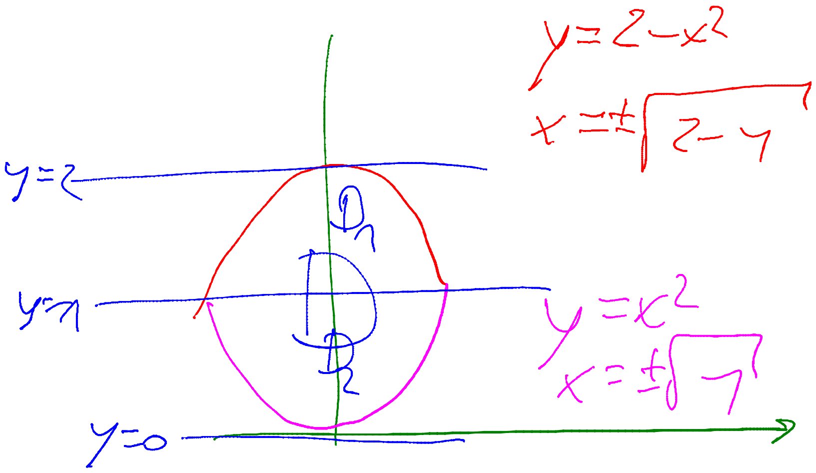
$$\boxed{f(x,y) := x + 2y}$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

$$\boxed{D := \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}}$$

Die Menge D ist ein Normalbereich und $f(x,y)$ ist stetig, somit gilt

$$\begin{aligned}
\boxed{\int_D f(x,y)d\mathbf{x}} &= \boxed{\int_{-1}^{1}} \underbrace{\left(\int_{x^2}^{2-x^2} (x+2y)dy\right)}_{F(x)} \boxed{dx} = \int_{-1}^{1} \underbrace{\left[xy + y^2\right]_{x^2}^{2-x^2}}_{F(x)} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \underbrace{\left(x(2-x^2) + (2-x^2)^2 - x^3 - x^4\right)}_{F(x)} dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4)dx = \boxed{\frac{16}{3}}
\end{aligned}$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

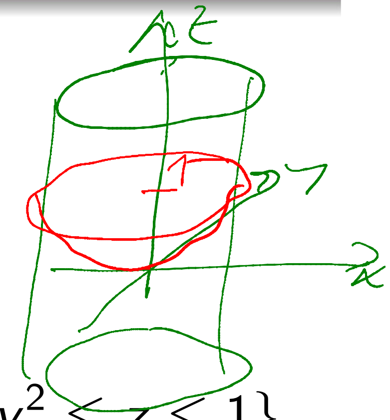
$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_{D_2} f\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Beispiel.

Zu berechnen ist das Volumen des Rotationsparaboloids

$f(x,y,z)=1$



$$\boxed{V := \{(x,y,z)^T \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ und } x^2+y^2 \leq z \leq 1\}}$$

Darstellung von V als Normalbereich

$$V = \{(x,y,z)^T \mid -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \text{ und } x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$$

Damit gilt

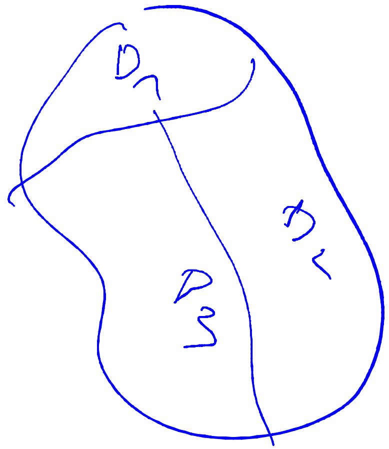
$$\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{vol}(V)} &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\int_{x^2+y^2}^{1} dz}_{F(x,y)}\, dy\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{(1-x^2-y^2)}_{F(x,y)}\, dy\, dx}_{G(x)} \\
&= \int_{-1}^{1} \underbrace{\left[(1-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}}_{G(x)} dx = \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} \underbrace{(1-x^2)^{3/2}}_{G(x)} dx \\
&= \frac{1}{3}\left[x(\sqrt{1-x^2})^3 + \frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin(x)\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

4 ? =

Integration über allgemeine Integrationsbereiche.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und messbare Menge. Man nennt $Z = \{D_1, \ldots, D_m\}$ eine allgemeine Zerlegung von D, falls die Mengen D_k kompakt, messbar und zusammenhängend sind und falls gilt

$$\boxed{\bigcup_{j=1}^{m} D_j = D} \qquad \text{und} \qquad \forall\, i \neq j \;:\; \boxed{D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset.}$$



Weiterhin heißt

$$\boxed{\mathrm{diam}(D_j)} := \sup\{\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_j \,\}$$

der Durchmesser der Menge D_j und

$$\boxed{\|Z\|} := \max\{\,\mathrm{diam}(D_j) \mid j = 1, \ldots, m\,\}$$

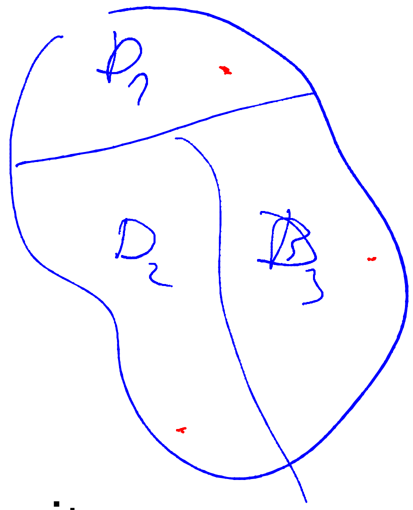
die Feinheit der allgemeinen Zerlegung Z.

Riemannsche Summe für allgemeine Zerlegungen.

$\Rightarrow$ integrabel

Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert man die Riemannschen Summen

$$R_f(Z) = \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}^j)\,\mathrm{vol}(D_j)$$



mit beliebigen $\mathbf{x}^j \in D_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Satz: Für jede Folge $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ allgemeiner Zerlegungen von D mit $\|Z_k\| \to 0$ (für $k \to \infty$) und für jede Folge zugehöriger Riemannscher Summen $R_f(Z_k)$ gilt

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} R_f(Z_k) = \underbrace{\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}}_{}}$$

mehrd. I.

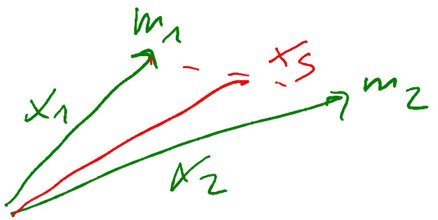
Eine wichtige Anwendung der Bereichsintegrale ist die Berechnung der Schwerpunkte von Flächen und Körpern.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge und $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der Schwerpunkt der Fläche (bzw. des Körpers) D gegeben durch

$$\mathbf{x}_s := \frac{\overbrace{\int_D \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}\,d\mathbf{x}}^{\text{Vektorwertig}}}{\underbrace{\int_D \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}}_{\text{Skalar}}}$$

$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

Das Zählerintegral (über eine vektorwertige Funktion) ist hierbei koordinatenweise zu berechnen.

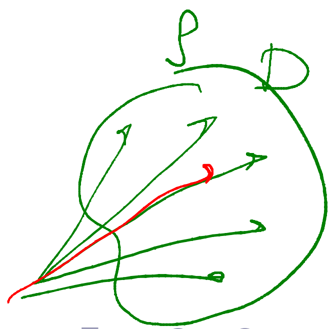


$m = \sum_{i=1}^{2} m_i$

$x_s\, m = \sum_{i=1}^{2} x_i m_i$, $\quad x_s = \frac{1}{m}\sum x_i m_i = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$

$\longrightarrow m = \int_D \rho(x)\,dx$

$\longrightarrow x_s = \frac{\int_D x\rho(x)\,dx}{\int_D \rho(x)\,dx}$



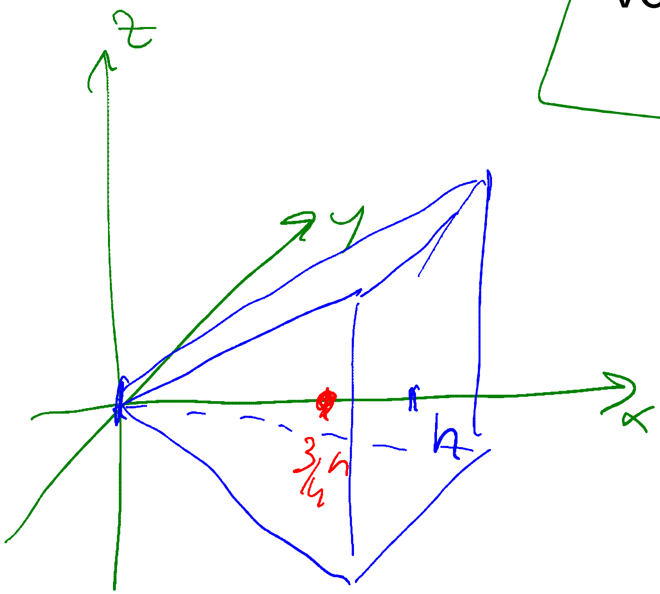
Beispiel.

$\rho(x)=1$

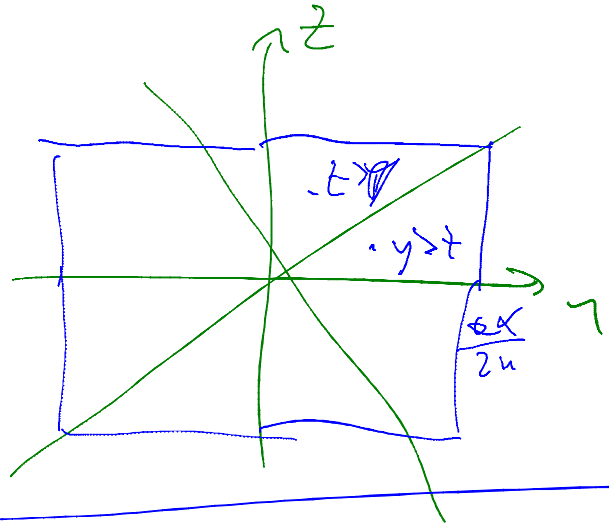
Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide P

$$P := \left\{ (x,y,z)^T \mid \max(|y|,|z|) \leq \frac{ax}{2h}, \quad 0 \leq x \leq h \right\}$$

Berechne das Volumen von P unter Annahme konstanter Dichte wie folgt.



$$\begin{aligned}
\boxed{\operatorname{vol}(P)} &= \int_0^h \underbrace{\int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \underbrace{\int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz}_{f(x)}\, dy}_{g(x)}\, dx \\
&= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h}\, dy\, dx \\
&= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \boxed{\frac{1}{3}a^2 h}
\end{aligned}$$

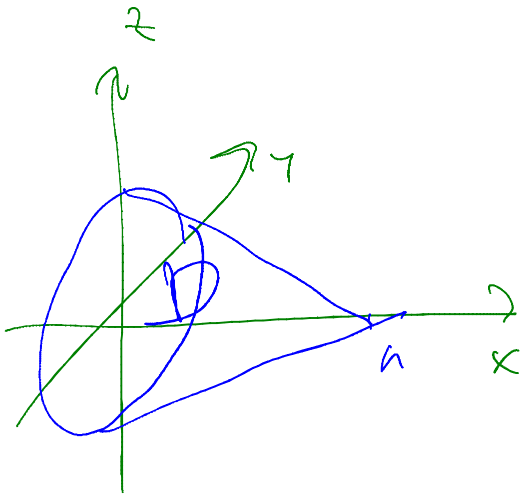


$$\boxed{\max(|y|,|z|) \le \frac{ax}{2h}}$$

$$y^2+z^2 \le \left(\frac{ax}{2h}\right)^2 \qquad 0 \le x \le h$$

$$-\sqrt{\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 - z^2} \le y \le \sqrt{\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 - z^2}$$

$$-\frac{ax}{2h} \le z \le \frac{ax}{2h}$$



$$\mathrm{Vol}\, D = \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \underbrace{\int_{-\sqrt{\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 - z^2}}^{+\sqrt{\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 - z^2}} 1 \, dy}_{F(x,z)} \, dz \, dx$$

Fortsetzung des Beispiels.

Weiterhin gilt

$$\int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dz\,dy\,dx = \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} \frac{ax^2}{h} \\ \frac{axy}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dy\,dx$$

$$= \int_0^h \begin{pmatrix} \frac{a^2x^3}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a^2h^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt von P liegt daher im Punkt $\mathbf{x}_s = (\frac{3}{4}h, 0, 0)^T$.

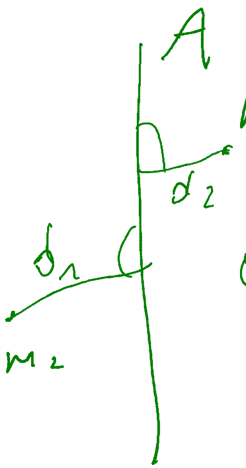
Trägheitsmomente von Flächen und Körpern.

Eine weitere wichtige Anwendung der Bereichsintegrale ist die Berechnung der Trägheitsmomente von Flächen und Körpern.

Definition: (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse)

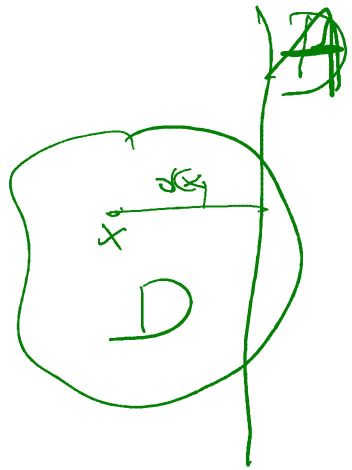
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$ bezeichne für $\mathbf{x} \in D$ eine Massendichte und $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punktes $\mathbf{x} \in D$ von einer vorgegebenen Drehachse.

Dann besitzt D bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment

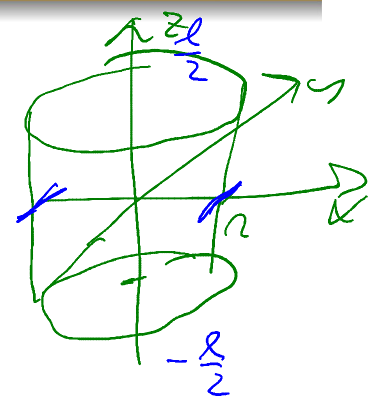


$\Theta = \sum_i m_i d_i^2$

$$\Theta := \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$



Beispiel.



Wir berechnen das Trägheitsmoment des homogenen Zylinders

$$Z := \{\, (x, y, z)^T \;:\; x^2 + y^2 \leq r^2, -l/2 \leq z \leq l/2 \}$$

bezüglich der x–Achse bei konstanter Dichte ρ wie folgt.

$$\Theta \;=\; \int_Z \rho(y^2 + z^2)d(x, y, z) = \rho \int_Z (y^2 + z^2)\underbrace{d(x, y, z)}_{dx\,dy\,dz}$$

dx

$$= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \underbrace{\int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2)\; dz}_{F(y)}\; dy\; dx$$

$$= \rho \int_{-r}^{r} \underbrace{\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (ly^2 + \frac{l^3}{12})\; dy}\; dx$$

f(x)

$$= \rho \frac{\pi l r^2}{12}(3r^2 + l^2)$$

Der Transformationssatz.

Ziel: Verallgemeinerung der (eindimensionalen) Substitutionsregel

φ

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

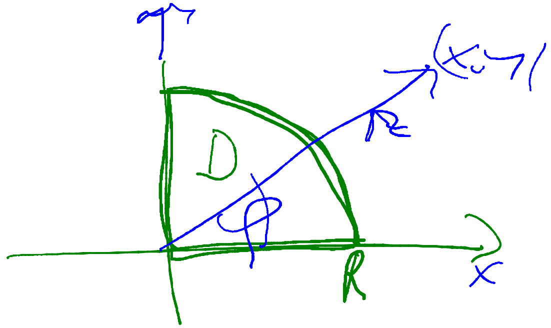
Satz: (Transformationssatz) Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung. $D \subset U$ sei eine kompakte, messbare Menge, so dass Φ auf D^0 einen $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus bildet. Dann ist auch $\Phi(D)$ kompakt und messbar, und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ gilt die Transformationsformel

integrierbar

$$\int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u}))\,|\det \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u}$$

Bemerkung: Man beachte, dass im Transformationssatz die Bijektivität von Φ nur auf dem inneren Bereich D^0 von D gefordert wird – nicht jedoch auf dem Rand ∂D!

Polarkoordinaten



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi)$

$|\det(J\Phi)| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

$\mathrm{Vol}\, D = \int_D 1 \cdot dx\,dy = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \; dy\, dx = \int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx$

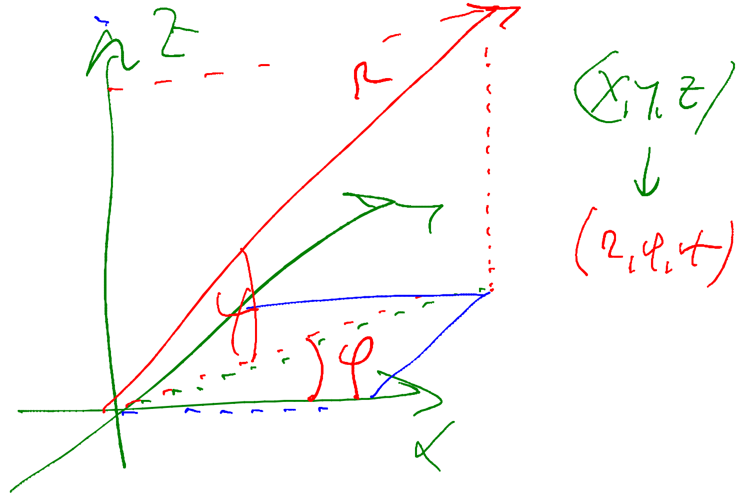
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R 1 \cdot r \, dr\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r\,dr = \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4}$

Kugelkoordinaten:

$$x = r\cos\psi\,\cos\varphi$$

$$y = r\cos\psi\,\sin\varphi$$

$$z = r\sin\psi$$



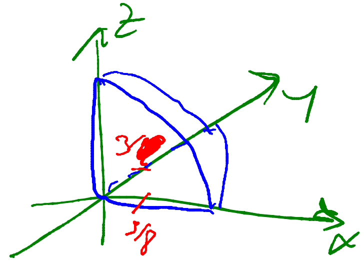
$$|J\phi| = \left|\det\begin{pmatrix} c\psi\, c\varphi & -r\, c\psi\, s\varphi & -r\, s\psi\, c\varphi \\ c\psi\, s\varphi & r\, c\psi\, c\varphi & -r\, s\psi\, s\varphi \\ s\psi & 0 & r\, c\psi \end{pmatrix}\right| = \left| s\psi\, r^2\left(c\psi\, s\psi\, s^2\varphi + c\psi\, s\psi\, c^2\varphi\right) + r^2 c\psi\left(c^2\psi\, c^2\varphi + c^2\psi\, s^2\varphi\right)\right|$$

$$= r^2\left| s^2\psi\, c\psi + c^3\psi\right| = r^2|\cos\psi| = r^2\cos\psi$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$$

Beispiel.

Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten $\rho = 1$



$$\boxed{V = \{(x, y, z,)^T \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } x, y, z \geq 0\}}$$

Es ist einfacher, den Schwerpunkt in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\psi \\ r \sin\varphi \cos\psi \\ r \sin\psi \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Die Transformation ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$\boxed{D = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

gilt $\Phi(D) = V$. Weiterhin ist Φ auf D^0 ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus mit

$$\boxed{\det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos\psi}$$

Fortsetzung des Beispiels.

$$\int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\pi/2} d\varphi$$

Nach dem Transformationssatz folgt

$$\boxed{\mathrm{vol}\,(V) = \int_V d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \underbrace{r^2 \cos\psi}_{|\det J_\Phi|} \, d\psi \, d\varphi \, dr = \frac{\pi}{6}}$$

und

$$\boxed{\mathrm{vol}\,(V) \cdot x_s} \;=\; \int_V x \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \underbrace{(r \cos\varphi \cos\psi)}_{x_s} \underbrace{r^2 \cos\psi}_{|\det J_\Phi|} \, d\psi \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\psi \, d\psi = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$

Daraus folgt $\boxed{x_s = \frac{3}{8}.}$

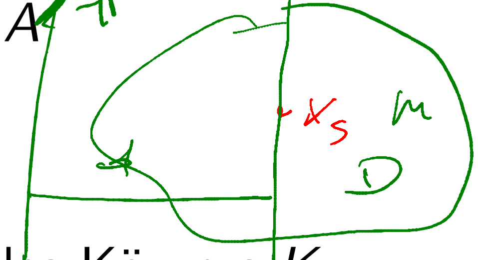
Analog berechnet man $y_s = z_s = \frac{3}{8}$.

Der Steinersche Satz.

Satz: (Steinerscher Satz) Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S$$

$A \parallel S$



Hierbei ist S die zu A parallele Achse durch den Schwerpunkt $\mathbf{x}_s$ des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes $\mathbf{x}_s$ von der Achse A.

Beweisidee: Setze $\mathbf{x} := \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_s + \mathbf{u}$. Dann gilt mit dem Einheitsvektor $\mathbf{a}$ in Richtung der Achse A

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \boxed{\rho \int_K \big(\underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle^2}_{d^2} \big) d\mathbf{x}} \\ &= \rho \int_D \big(\langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{x}_s + \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle^2 \big) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

wobei

$$D := \{ \mathbf{x} - \mathbf{x}_s \,|\, \mathbf{x} \in K \}$$